J. TANNERY

ELEMENTE DER MATHEMATIK

DEUTSCHE AUSGABE VON P. KLAESS

JULES TANNERY
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT PARIS
SUBDIREKTOR DER ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ELEMENTE DER MATHEMATIK

MIT EINEM GESCHICHTLICHEN ANHANG VON PAUL TANNERY

AUTORISIERTE DEUTSCHE AUSGABE VON

DR. P. KLAESS
GYMNASIALLEHRER IN ECHTERNACH (LUXEMBURG).

MIT EINEM EINFÜHRUNGSWORT VON

F. KLEIN

UND 184 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1909

Einführungswort.

Schlag auf Schlag folgen sich jetzt im Teubnerschen Verlag zusammenhängende Darstellungen, welche die Grundgedanken der von den Reformfreunden angestrebten Umgestaltung des mathematischen Unterrichts nach ihren verschiedenen Richtungen zur Geltung bringen. Vor einem Vierteljahr, auf der Kölner Naturforscherversammlung, konnte ich den ersten Teil des unmittelbar für den Schulbetrieb entworfenen Lehrbuchs von Behrendsen-Götting*) und Band I des mehr systematisch angelegten Handbuchs von Borel-Stäckel**) vorlegen. Unmittelbar darauf erschien in autographierter Form Teil I meiner für den reiferen Studenten der Mathematik oder auch für den angehenden Lehrer bestimmten Vorlesungen über Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.***) Wieder an ein anderes Publikum wendet sich die nunmehr vorliegende deutsche Übersetzung des Werkes, mit welchem der führende Pädagoge der französischen Mathematiker, Jules Tannery, vor einigen Jahren die französische Reformbewegung eröffnete. So mancher, der auf der Schule mathematische Kenntnisse nur in traditionell begrenzter Form erwarb, wird das Bedürfnis empfinden, sich über die elementare Bedeutung der ihn lockenden, aber ihm in ihren Einzelheiten scheinbar unzugänglichen höheren Mathematik an der Hand eines kundigen Führers zu orientieren. Diesem Bedürfnisse, welches in Deutschland ebenso verbreitet ist wie anderwärts, will Tannerys Darstellung entgegenkommen; ich verweise wegen der Einzelheiten auf die nachstehende, vom Verfasser selbst herrührende „Vorrede zur Deutschen Ausgabe". Es ist nicht zu bezweifeln, daß durch das Erscheinen dieser deutschen Übersetzung vielen ein wirklicher Dienst geleistet sein wird.

Göttingen, Weihnachten 1908.

F. Klein.

---

*) Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen: A. Unterstufe.
**) Die Elemente der Mathematik: Erster Band: Arithmetik und Algebra.
***) Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Teil II (Geometrie) wird bis Ostern 1909 erscheinen.

Vorrede zur deutschen Ausgabe.

Den deutschen Lesern, denen ich die von Herrn Dr. P. Klaess angefertigte vorliegende Übersetzung meiner „Elemente“ darbiete, schulde ich einige Worte der Aufklärung über die Absicht, in der das Buch verfaßt wurde.

Es wurde hauptsächlich für die Schüler der Philosophie-Klasse geschrieben; diese Klasse bildet den Abschluß der humanistischen Studien an den mittleren Lehranstalten Frankreichs. Die meisten dieser Schüler bringen zum Studium der Philosophie ziemlich weitgehende literarische, aber geringe exakt-wissenschaftliche Kenntnisse mit. Der Zweck des mathematischen Unterrichtes in unserer Philosophie-Klasse besteht nun darin, daß wenigstens bei den begabteren Schülern die Begierde, zu wissen, was Mathematik eigentlich ist, geweckt werde; daß die Schüler einige der gebräuchlichsten Methoden und die die Mathematik beherrschenden Ideen kennen lernen. Diesen Lehrgang suchte ich zu entwickeln; ich wollte jedoch nicht bloß ein Schulbuch schreiben; mein Streben ging dahin, die mathematischen Begriffe, die meiner Ansicht nach ein wirklich gebildeter Mann kennen soll, zusammenzufassen, und zwar so zusammenzufassen, daß derjenige, der sich diese Begriffe ganz zu eigen gemacht hat, die Unendlichkeit der Wissenschaft, bis an deren Schwelle ich ihn führen wollte, wenigstens ahnt. Das Anmaßende eines solchen Strebens habe ich mir nicht verhehlt; allein ich muß sagen, was ich versucht habe.

In allen Ländern kann man zahlreiche junge Leute finden, die beim Abschluß ihrer mittleren Studien mehr oder weniger deutlich fühlen, was ihnen fehlt. Ein bißchen Rechnen, ein bißchen Algebra, ein bißchen Geometrie: Das ist alles, was sie gelernt haben. Und zur Hälfte haben sie das Gelernte schon wieder vergessen; es war dies übrigens so gering, daß es sie kaum fesselte, denn sie sahen weder die Fortsetzung noch den Nutzen von dem, was sie gelernt. Vielleicht sind ihnen die Resultate irgendeiner andern Wissenschaft aufgefallen; sie fühlen sich zu ihr hingezogen, allein ihre Unwissenheit in der Mathematik hindert sie, dieselbe zu studieren. Das Gefühl dieses Unvermögens lastet auf ihnen; es erwacht bei dem Mediziner, der Physik und Chemie studieren soll, beim Juristen, der sich ein bißchen mit Nationalökonomie abgeben will, beim Reisenden oder beim Kaufmann und besonders bei all denjenigen, deren technische

Beschäftigung auf einer Anwendung der exakten Wissenschaften beruht, und die sich über ihr Tun Rechenschaft geben wollen.

Alle diese jungen Leute, deren Verstand schon gereift ist, sind einer Anstrengung fähig; aber sie laufen Gefahr, sich diese Anstrengung größer vorzustellen, als sie eigentlich ist, und anstatt die Lücken in ihrem Wissen auszufüllen, lassen sie sich dann entmutigen. Ich möchte sie nun beruhigen, ihnen klar machen, daß eine begrenzte Arbeitsleistung genügt, um sich die Grundideen anzueignen und die zum Verständnis eines guten Teils der andern Wissenschaften nötigen Methoden kennen zu lernen. Ich möchte ihnen bei dieser Arbeit Helfer und Führer sein.

Aus diesem Grunde habe ich in der Einleitung manches wiederum von Anfang an entwickelt und dabei besonders Gewicht auf die Definitionen und den Sinn der Operationen gelegt; so habe ich mich beispielsweise nicht gescheut, etwas näher einzugehen auf die Brüche oder auf die mit Vorzeichen versehenen Zahlen. Ohne Zweifel haben die meisten Leser diese Sachen schon gelernt; sollten sie dieselben aber nicht klar vor Augen haben, sollten sie das Handwerkszeug, das sie vielleicht noch handhaben können, nicht mehr genau kennen, so ist an ein Weitergehen nicht zu denken. An andern Stellen habe ich manchmal Beweise mehr oder weniger eingehend behandelt, manchmal mich darauf beschränkt, Lehrsätze, deren ich später bedurfte, genau zu formulieren. Der Auswahl, die ich getroffen, haftet notwendigerweise etwas Willkürliches an; mich beruhigt dabei der Gedanke, daß ich nicht für Kinder, sondern für junge Leute geschrieben habe, die imstande sind, einen Beweis auch in einem andern Buche, als gerade in dem, das sie in Händen haben, nachzuschlagen; übrigens glaube ich, eher zu viel als zu wenig erklärt zu haben, und die Einleitung enthält jedenfalls alles zum Verständnis des Buches Notwendige.

Die folgenden Kapitel bilden eine Art Einführung in die analytische Geometrie, in das Studium der Kurven, der Funktionen, der Ableitungen, der Integrale, ja selbst der Astronomie. Große Worte, mit denen wir große Ideen verbinden. Gewiß! Aber diese Ideen sind im Grunde sehr einfach; ihr Verständnis und ihre Anwendung erfordern keine langwierigen Vorstudien. Freilich zieht man um so größeren Nutzen daraus, je mehr algebraische oder geometrische Kenntnisse man besitzt; indessen kann man sich diese Ideen zu eigen machen und sie anwenden, bevor man diese Kenntnisse erworben hat; ja gerade durch sie wird die Nützlichkeit dieser Kenntnisse in helles Licht gerückt. Es versteht sich von selbst, daß das intuitive

Moment in weitgehendstem Maße herangezogen wurde; denn wer wollte in einem derartigen Buche sich dazu versteigen, die grundlegenden Sätze der Analysis zu arithmetisieren? Überdies bin ich überzeugt, daß bei jeder elementaren Erörterung das intuitive Moment in weitem Maße zur Anwendung gelangen soll; rein logische Erörterungen können nur den mit den mathematischen Ideengängen vollständig Vertrauten fesseln. Gleichwohl war ich bestrebt, den Leser nie über die Kraft einer Beweisführung im Unklaren zu lassen; nötigenfalls zeigte ich ihm, inwiefern irgendeine Beweisführung, mit der er fürlieb nehmen mußte, unvollständig war.

Viele ausgezeichnete Lehrer sind nicht geneigt, die Begriffe Bewegung, Stetigkeit, Ableitung, Integral schon in den Elementen zu behandeln. Ich könnte diesen Punkt übergehen, da ich mich ja an gereifte junge Leute wende; hätte ich für jüngere Leser geschrieben, so wäre ich gezwungen gewesen, einzelne Punkte weiter zu entwickeln, die Zahl der Anwendungen und der numerischen Beispiele zu vermehren, manchmal Sätze, die ich der Kürze halber in synthetischer Form anführte, näher zu erläutern. Ich will jedoch mit meiner Meinung über den Kern der Sache nicht zurückhalten.

Ich teile nicht die Ansicht, daß der Unterricht der Elemente unveränderlich sein soll, weder was die Methoden, noch was den Gegenstand selbst anbelangt; er soll meiner Meinung nach dem Fortschritt der Wissenschaft Rechnung tragen, die allgemeinen Ideen und Methoden auf sich einwirken lassen, sobald dieselben genügend klar und leicht geworden sind. Freilich muß diese Umgestaltung mit Vorsicht und ohne Übereilung geschehen; allein ich denke, es zeugt nicht von Unvorsichtigkeit und Übereilung, wenn man in den Unterricht Ideen einführen will, die zwei oder drei Jahrhunderte alt sind, und deren außergewöhnliche Leistungsfähigkeit überreichlich erwiesen ist. Ich will sogar davon absehen, daß sie auch das Studium der Physik außerordentlich erleichtern. In Frankreich ist diese Einführung seit einigen Jahren vollzogen; das Experiment ist gut gelungen und wird von Tag zu Tag besser gelingen; nach und nach werden bessere pädagogische Traditionen Platz greifen. Jedoch war man, wie ich meine, zu schüchtern; um den elementaren Unterricht zu erleichtern, muß man weiter gehen und die eingeführten Ideen weiter ausnützen. Die allgemeinen Methoden müssen die speziellen ersetzen, so scharfsinnig letztere auch sein mögen. Hat man beispielsweise in der Geometrie das Maß des geraden Prismas abgeleitet, so bedarf es nur weniger Minuten zur Ableitung aller Sätze, die das Maß der verschiedenen in der Elementargeometrie betrachteten Körper betreffen. Wozu noch diese lange Reihe von Lehrsätzen beibehalten, mittels derer man die Theorien aller dieser Maße mühselig aufbaut? Die Wissenschaften dehnen sich außergewöhnlich schnell aus; das menschliche Leben wird nicht länger, ebensowenig wie die Dauer der Jugend. Der Elementarunterricht muß mehr mit allgemeinen Ideen durchtränkt, und alles, was ihn unnötigerweise belastet, muß preisgegeben werden. Ich weiß wohl, ein solcher Entschluß wird nicht ohne einiges Bedauern gefaßt; allein der stetige Fortschritt der Wissenschaft fordert meines Erachtens dieses Opfer.

Zum Schlusse will ich meinen Dank aussprechen sowohl Herrn Klaess, der die Übersetzung angefertigt, wie der Firma B. G. Teubner, die den Verlag bereitwilligst übernommen hat. Besondern Dank schulde ich Herrn Felix Klein, der mir die sehr große Ehre erwies, sich für mein Buch zu interessieren und in seinen Vorlesungen anerkennend zu erwähnen; doppelt würde mich diese Anerkennung freuen, wenn ich wüßte, daß meine Leser sie nicht als zu schmeichelhaft betrachten müßten.

Paris, 12. April 1908. **Jules Tannery.**

Vorrede zur Originalausgabe.

Vorliegendes Buch ist nichts weiter als die Ausarbeitung des mathematischen Pensums der Philosophieklasse.

Ich habe jedoch geglaubt, eine längere Zusammenfassung der zum vollen Verständnis der folgenden Abschnitte notwendigen Vorkenntnisse in der Arithmetik, Algebra und Geometrie als Einleitung vorausschicken zu müssen. Der Leser kann sie nach Bedürfnis vorher durchstudieren oder gelegentlich zu Rate ziehen.

Beim Verfassen dieser Einleitung bin ich etwas willkürlich verfahren.

Über den einen Punkt war ich mir ganz klar, daß alle Definitionen wieder einmal gründlich durchzunehmen waren. Wenn man viel mit so etwas umgeht, vergißt man oft, was es eigentlich ist, und weiß nur mehr, wie man es zu gebrauchen hat. Das mag genügen, wenn es immer zu demselben Zwecke geschieht; soll man sich aber an eine Arbeit machen, die einem neu ist, so muß man eben sein Handwerkszeug etwas genauer kennen.

In der Reihenfolge der Lehrsätze habe ich bei einigen nur den Wortlaut, bei andern die Umrisse der Beweisführung gegeben, verschiedene endlich bis in alle Einzelheiten entwickelt. Ich bin über Dinge hinweggegangen, die man als sehr wesentlich ansehen kann. Es ist klar, daß ich nicht das ganze Pensum der vorhergehenden Klassen durchnehmen konnte. Ich habe mich in meiner Auswahl leiten lassen durch die Wichtigkeit, die ich den einzelnen Dingen teils an sich, teils in bezug auf Späteres beimessen zu dürfen glaubte; dann aber auch durch das Urteil, das ich mir mit Recht oder Unrecht über eventuelle Lücken im Gedächtnis des Lesers gebildet habe. Wenn er glaubt, ich habe zu große Unwissenheit bei ihm vorausgesetzt, möge er mich entschuldigen.

Kommt jemand ans Ende dieser langen Einleitung, ohne etwas zu finden, was ihm unbekannt war, so hat er doch zum mindesten Klarheit in seine Erinnerungen gebracht und kann ruhig den Rest des Buches durchnehmen. Es wird ihn nichts mehr aufhalten; höchstens kann das beständige Eingehen in Einzelheiten ihn ungeduldig machen. Diejenigen aber, die der gründlichen Wiederholung dieser elementaren Kenntnisse wirklich bedurften, bevor an ein Weitergehen zu denken war, werden hoffentlich einsehen, daß die Anstrengung, die man von ihnen verlangt, nur gering ist, und sie kaum über ihre Kraft finden; belohnt sie dafür nicht das Interesse, das der Rest des Buches ihnen bietet, so ist daran sicher der Autor, nicht aber der Gegenstand schuld. Denn in dem ganzen Gebiet der mathematischen Wissenschaften kenne ich keinen schöneren und nützlicheren, wegen der Perspektiven, die er erschließt, und der Anwendungen, die er zuläßt.

Was die Mathematik ist, wie außerordentlich weit sie reicht, welche Probleme sie stellt und löst, kann man nur ahnen, wenn man weiß, was eine Funktion ist, wie man eine gegebene Funktion studiert, wie man ihre Variationen verfolgt, wie man ihren Verlauf durch eine Kurve darstellt, wie Algebra und Geometrie sich gegenseitig Dienste leisten, wie Zahl und Raum sich gegenseitig beleuchten; wenn man weiß, wie man eine Tangente, einen Flächeninhalt, ein Volumen bestimmt, wie man dazu kommt, neue Funktionen, neue Kurven zu schaffen und deren Eigenschaften zu studieren. Das sind die Begriffe und Methoden, deren man zur Lektüre technischer Bücher mit mathematischen Erörterungen bedarf. Sie sind unerläßlich für denjenigen, der nur einigermaßen die an Schnelligkeit immer zunehmende wissenschaftliche Bewegung mit Verständnis verfolgen will, neben den immer zahlreicher werdenden praktischen Anwendungen der wissenschaftlichen Theorien, die Tag für Tag neue weitgehende Veränderungen in unserer Denk- und Lebensweise hervorrufen.

Sie sind einfach und leicht, wenn man sie auf das, was wesentlich an ihnen ist, zurückführt; leichter als viele Beweisführungen, mit denen man ohne Bedenken die Schüler bekannt macht, obschon sie lang und verwickelt sind, und ihre Tragweite nicht über das hinausgeht, was sie eben zu beweisen haben. Ich bin der Meinung, daß sie immer mehr in den Elementarunterricht eindringen sollen, weil sie ihn nur abkürzen und stärken können. Die formale Bildung des Geistes darf ja ohne Zweifel nicht vernachlässigt werden. Aber ist denn anzunehmen, daß besondere und beschränkte Methoden wie diese, oder daß Fragen, welche die Schüler als nutzlos und unnatürlich empfinden, mehr dazu beitragen als allgemeine Methoden? Und wenn die Schüler einen Einblick in die Macht dieser Methoden bekommen, wird das sie nicht anspornen, zu arbeiten, bis sie dieselben beherrschen und sicher anzuwenden wissen?

Ich habe mich an untenstehenden Lehrplan gehalten, mit Ausnahme der paar Seiten, auf denen ich eine Definition der Kreisfunktionen, der logarithmischen und der Exponentialfunktion gegeben habe. Dieselben sind für diejenigen Leser geschrieben, die im Studium der Physik etwas weiter vordringen möchten.

Mein Bruder, Herr Paul Tannery, hat auf meine Bitte den Geschichtlichen Anhang am Ende des Buches verfaßt. Vieles knüpft mich an ihn, der übrigens durch die Zuverlässigkeit seines wissenschaftlichen Könnens und den Weitblick seines philosophisch angelegten Geistes mehr als irgend jemand dazu berufen war. Es ist dies nicht der einzige Anteil, den er an diesem Buche hat. Während ich es für die Schüler der Philosophie-Klasse schrieb, versetzte ich mich in die Zeit zurück, wo ich selbst in dieser Klasse saß; ich dachte an unsere langen Plaudereien, an die Mathematikstunden, die er uns gab und an die er sich wahrscheinlich kaum noch erinnert; und mir schien mehr als einmal, als erklärte ich die Dinge genau so, wie er mir sie damals erklärt hatte.

Man wird finden, daß diese Geschichtlichen Anmerkungen sehr wichtige Punkte in der Geschichte der Mathematik berühren und sich gewöhnlich auf Fragen beziehen, die im Lehrplan vorkommen. Bei einer geschichtlichen Darstellung aber, die nicht verstümmelt sein soll, ist ein gewisses Maß Freiheit in der Behandlung notwendig. Der Leser wird vielleicht weiter nichts bedauern, als daß mein Bruder von dieser Freiheit in allzu maßvoller Weise Gebrauch gemacht hat.

Paris, am 18. April 1903.

Jules Tannery.

Lehrpläne vom 31. Mai 1902.

Philosophieklasse.

Mathematik (2 Stunden).

Wiederholung der hauptsächlichsten Regeln über positive und negative Zahlen. Entwicklung von $(a+b)^2$, $(a+b)^3$. Identität

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + b^n).$$

Elemente der geometrischen Algebra der Griechen; Darstellung einer Zahl durch eine Strecke, eines Produktes durch den Inhalt eines Rechteckes. Graphische Darstellung der Identitäten

$$(a+b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab.$$

Satz vom Quadrat der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes.

Zieht man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogramms Parallelen zu den Seiten, so teilen diese Parallelen das Parallelogramm in 4 andere, von denen 2 (die nicht von der Diagonale geschnitten werden) äquivalent sind.

Ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck mit vorgeschriebener Summe oder vorgeschriebener Differenz der Seiten zu verwandeln. Berechnung dieser Seiten mit Hilfe der Konstruktion.

Algebraische Auflösung der Gleichung zweiten Grades. Anwendung auf das vorhergehende Problem; Vergleichung der Resultate.

Vorzüge der modernen Bezeichnungsweise, insbesondere der positiven und negativen Zahlen.

Bestimmung eines Punktes der Ebene durch 2 positive oder negative Zahlen; umgekehrt: Bestimmung eines Systems von zwei positiven oder negativen Zahlen durch einen Punkt der Ebene.

Erweiterung des Koordinatenbegriffes. Länge und Breite eines Punktes der Kugel.

Graphische Darstellung von Vorgängen, die nur von einer Veränderlichen abhängen. Temperatur- und Gewichtskurven. Anwendung auf die Statistik. Begriff der Funktion, graphische Darstellung einfachster Funktionen:

$$y = ax,$$
$$y = ax + b,$$
$$y = x^2,$$
$$y = x^3,$$
$$y = \frac{1}{x}.$$

Konstruktion einer Geraden, die durch eine numerische Gleichung ersten Grades in x und y definiert ist. Richtungskoeffizient*). Nullpunktordinate. Richtungskoeffizient einer Geraden, die durch zwei Punkte geht.

Anwendung von Millimeterpapier. Auflösung zweier Gleichungen ersten

---

*) Der Richtungskoeffizient ist zu definieren als der Koeffizient von x, wenn die Gleichung nach y aufgelöst ist, oder als die Ordinate des Punktes mit der Abszisse 1 derjenigen Geraden, die durch den Nullpunkt geht und der gegebenen Geraden parallel ist.

Grades mit 2 Unbekannten, mit Hilfe des Schnittpunktes zweier Geraden; numerischer Gleichungen von der Form

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x^3 + px + q = 0$$

mit Hilfe der Schnittpunkte der (einmal gezeichneten) Kurven

$$y = x^2 \text{ und } y = x^3$$

und der Geraden

$$y + px + q = 0.$$

Graphische Eisenbahnfahrpläne, die von Registrierapparaten gezeichneten Kurven. Gleichungen einfacher geometrisch definierter Kurven; Mittelpunktsgleichung des Kreises, Parabel, Zissoïde des Diokles.

Begriff der Tangente und der Ableitung. Beispiele von Tangenten als Grenzlage einer Sekante (Kreis, Parabel). Richtungskoeffizient der Tangente: Anwendung auf einfache Fälle $\left(y = x^2,\ y = x^3,\ y = \frac{1}{x}\right)$. Elemente über den Gebrauch der Ableitung zum Studium der Variationen einer Funktion. Angenäherte Berechnung des Flächeninhaltes einer auf Millimeterpapier gezeichneten Kurve durch die Summe der im Innern der Kurve liegenden Quadrate. Grenzwert des begangenen Fehlers, hergeleitet aus der Anzahl der von der Kurve geschnittenen Quadrate. Bei Anwendung von sehr kleinen Quadraten kann dieser Fehler beliebig klein gemacht werden.

Flächeninhalt des Dreieckes, hergeleitet aus dem gemeinsamen Grenzwerte zweier Rechteckssummen, deren eine größer, die andere kleiner als der Flächeninhalt des Dreieckes ist. Flächeninhalt der Parabel.

Umkehrung der Ableitung. Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreieckes oder einer Parabel durch Aufstellung einer Funktion, deren Ableitung nach x gleich ax oder ax^2 ist.

Elemente der Methode vom unendlich Kleinen; Beispiele von unendlich kleinen Größen verschiedener Ordnungen; Grenzwerte von Verhältnissen und Summen, hergeleitet aus der Vernachlässigung von Größen, die unendlich klein sind gegenüber denen, die man beibehält.

Kubatur und Komplanation der in der Elementargeometrie behandelten Körper.

Allgemeine Ratschläge. Der Lehrer möge nicht vergessen, daß die Schüler, die er vor sich hat, wenig Übung in Mathematik besitzen; alle abstrakten Theorien sind daher zu vermeiden. Ebensowenig sind die allgemeinen Begriffe zuerst zu entwickeln; aus geeignet gewählten Beispielen sollen sie herausgeschält werden. Die Zeit und die Einzelheiten der Darstellung, die zum Verständnis nötig sind, bleiben dem Ermessen des Lehrers überlassen. Der obige Lehrplan ist nicht als ein fest verordneter zu betrachten; er soll vielmehr nur als Richtschnur dienen: je nach den Fähigkeiten der Schüler, je nach dem Interesse, das er bei ihnen wach zu rufen versteht, wird der Lehrer einzelne Teile des Lehrplans mehr oder weniger ausgedehnt behandeln. Diese Bemerkungen gelten besonders von den Anwendungen, die am Schlusse des Lehrplanes erwähnt sind: diese sind, auf alle Fälle, ausführlich zu behandeln, ohne zu sehr auf die Strenge der Beweisführung zu achten.

Besonders empfohlen sei auch noch die Einflechtung geschichtlicher Bemerkungen: so kann z. B. die Exhaustionsmethode der Alten (Euklides, Archimedes) Erwähnung finden, ebenso einige Einzelheiten der Erfindung der Differential- und Integralrechnung.

Das Ziel des Lehrers soll sein: einerseits die philosophische Ausbildung der Schüler zu fördern durch Vermittlung wichtiger Begriffe, andrerseits die nötige Grundlage zu schaffen für diejenigen Schüler, die sich nachher vorbereiten wollen auf das Fähigkeits-Zeugnis in Physik, Chemie und Naturwissenschaften.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

§ 1. Grundoperationen an ganzen Zahlen.

1. Den Begriff der ganzen Zahl will ich als bekannt voraussetzen. Wir wissen, daß die ganze Zahl entweder angibt, wieviel verschiedene Gegenstände in einer Sammlung sind, oder daß sie die Stelle bezeichnet, die ein Gegenstand in einer bestimmten Reihe einnimmt.

Auch beim Dezimalsystem will ich mich nicht länger aufhalten. Letzteres erlaubt uns nämlich, irgendeine Zahl auf sehr einfache Weise darzustellen. Obschon wir dasselbe tagtäglich benutzen, so dürfen wir doch nicht vergessen, daß das ihm zugrunde liegende Prinzip in seiner Einfachheit bewunderungswürdig ist.

Die Eigenschaften der Grundoperationen der Arithmetik lassen sich aus dem Begriff der ganzen Zahl auf rein logischem Wege ableiten. Vom wissenschaftlichen Standpunkte aus betrachtet verdient diese Art der Ableitung jedenfalls den Vorzug. Ich möchte jedoch dem Leser raten, die Operationen in ein konkretes Gewand zu kleiden.

Man ersetze die abstrakten Zahlen durch eine Anzahl Gegenstände, z. B. Kugeln oder Punkte, und die Operationen selbst durch Manipulationen an diesen Gegenständen. Auf diese Weise werden sowohl der Sinn als die Grundeigenschaften der Operationen sofort klar zutage treten.

2. Liegen z. B. mehrere Zahlen vor, und ist jede der Zahlen auf die oben angegebene Weise durch eine mit Kugeln gefüllte Urne dargestellt, so wird man diese Zahlen *addieren*, indem man sämtliche Kugeln in einer einzigen Urne vereinigt. Die Anzahl der Kugeln in dieser Urne stellt die *Summe* der vorgelegten Zahlen dar. Die Summe zweier oder mehrerer Zahlen bleibt bei Änderung der Reihenfolge unverändert, ebenso wie die Anzahl von Gegenständen in einer Sammlung unverändert bleibt, wenn ich diese Gegenstände in anderer Reihenfolge zähle. Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man derselben Null hinzufügt. Man kann die Kugeln von einer größeren Anzahl der oben gegebenen Urnen in eine einzige Urne zusammenschütten, ehe man sie alle in der Hauptturne vereinigt; arithmetisch gesprochen heißt das: die Summe von mehreren Zahlen bleibt unverändert, wenn man einzelne von diesen Zahlen duich ihre Teilsumme ersetzt.

Jede Zahl, die man erhält, indem man zu einer gegebenen Zahl eine von Null verschiedene Zahl hinzuzählt, nennt man *größer* als die gegebene Zahl. Wenn man zu einer und derselben Zahl zwei verschiedene Zahlen hinzuzählt, so erhält man zwei verschiedene Zahlen; die größte derselben entspricht der größten der beiden hinzugefügten Zahlen.

3. Die *Subtraktion* involviert den Begriff des *Wegnehmens:* es möge eine Zahl (Minuendus) gegeben sein, die wir durch eine mit Kugeln gefüllte Urne darstellen; wenn wir von diesen Kugeln eine gewisse Anzahl (Subtrahendus) wegnehmen, so stellt die Anzahl der übrigbleibenden Kugeln das Resultat (Differenz oder Rest) der Subtraktion dar. Da

$$\text{Minuendus} - \text{Subtrahendus} = \text{Differenz}$$

ist, so leuchtet sofort ein, daß

$$\text{Differenz} + \text{Subtrahendus} = \text{Minuendus}$$

ist. Dieses erlaubt uns, den Rest oder die Differenz noch folgendermaßen zu definieren: Differenz zweier Zahlen nennt man diejenige Zahl, die man zur zweiten Zahl hinzufügen muß, um die erste zu erhalten; die so definierte Zahl ist natürlich eindeutig. Die Operation ist nur möglich, wenn der Subtrahendus kleiner oder gleich ist dem Minuendus. Im letzteren Falle und nur in diesem ist der Rest gleich Null. Man ändert eine Zahl nicht, wenn man Null von ihr abzieht.

Um eine Summe von einer Zahl abzuziehen, kann man die einzelnen Glieder dieser Summe nacheinander von der Zahl abziehen. Man addiert eine Differenz von zwei Zahlen zu einer anderen Zahl, indem man den Minuendus addiert und den Subtrahendus subtrahiert.

Man subtrahiert eine Differenz von zwei Zahlen von einer gegebenen Zahl, indem man den Minuendus subtrahiert und den Subtrahendus addiert.

4. Diesen letzten Satz möchte ich kurz erläutern.

In den nebenstehenden drei Rechtecken *I, II, III* sind in jedes eine Anzahl Punkte eingezeichnet.

Es möge mit A die *Menge* oder die Zahl der in *I* und *II* enthaltenen Punkte bezeichnet werden; mit B die Zahl der Punkte in *II* und *III*; mit C die Gesamtheit der in *III* enthaltenen Punkte. Und es handle sich darum, von der Zahl A die Differenz der Zahlen

B und *C*, d. h. die in *II* enthaltenen Punkte abzuziehen. Aus der Figur ist sofort ersichtlich, daß nunmehr die in *I* enthaltenen Punkte übrig bleiben. Zu demselben Resultate wären wir aber gelangt, wenn wir zu der Punktmenge *A* die Punktmenge *C* hinzugefügt und von dieser Summe wieder die Punktmenge *B* abgezogen hätten.

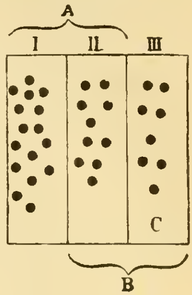


Fig. 1.

Die Beweisführung bei den anderen Sätzen gestaltet sich analog, ist aber leichter. Wollen wir z. B. von der Gesamtheit der in *I*, *II* und *III* enthaltenen Punkte die Summe der in *II* und *III* enthaltenen Punkte abziehen, so ist ersichtlich, daß wir die in *II* enthaltenen Punkte zuerst, und dann die in *III* enthaltenen wegnehmen können. Als Schlußresultat werden immer die in *I* enthaltenen Punkte übrig bleiben. Dieses ist der erste der oben ausgesprochenen Sätze.

5. Wenn es sich darum handelt, zu einer gegebenen Zahl *A* eine andere Zahl *B* hinzuzufügen, dann von dieser Summe wieder eine andere Zahl *C* abzuziehen, so kann man, falls *C* nicht größer als *A* ist, zuerst *C* von *A* abziehen und zu dem so erhaltenen Resultate *B* addieren.

Fassen wir uns allgemein, so können wir uns folgendermaßen ausdrücken: Hat man mehrere aufeinander folgende Additionen und Subtraktionen auszuführen, so kann man diese Operationen in beliebiger Reihenfolge vornehmen, vorausgesetzt natürlich, daß man nicht durch eine undurchführbare Subtraktion aufgehalten werde. Um die Allgemeinheit dieses Satzes sofort zu erfassen, braucht man nur an einen Kassierer zu denken, der nacheinander verschiedene Summen einnimmt oder ausbezahlt: wenn die einlaufenden und auszubezahlenden Summen stets dieselben bleiben, so wird das Endresultat unabhängig von der Reihenfolge der Einnahmen oder Ausgaben sein.

Die Differenz zweier Größen bleibt konstant, wenn man zu den beiden Größen dieselbe Zahl hinzufügt oder von den beiden abzieht.

6. Hat man die Summe mehrerer Summanden von gleicher Größe zu finden, so nennt man die zu vollziehende Operation *Multiplikation*; der mehrfach wiederholte Summand heißt der *Multiplikand*; die Anzahl der gleichen Summanden nennt man *Multiplikator*: das Resultat der Rechnung heißt *Produkt*.

Sind z. B. 7 mit Kugeln gefüllte Urnen gegeben, und enthält jede Urne 12 Kugeln, so ist die Summe aller dieser Kugeln gleich dem Produkt von 12 mit 7 oder, wie man auch sagt, gleich 12 mal 7.

Wenn der Multiplikator gleich 1 ist, so ist das Produkt gleich dem Multiplikanden; ist der Multiplikator gleich 0, so ist das Produkt gleich 0.

7. Wenn man sich die eben angeführte konkrete Darstellung der Multiplikation vor Augen führt, so ist sofort ersichtlich, daß man eine Zahl mit einer Summe von 2 Zahlen multipliziert, indem man sie mit den einzelnen Gliedern der Summe multipliziert und die entstehenden Produkte addiert. Sind z. B. 7 Urnen und 9 Urnen, jede mit 12 Kugeln, gegeben, so kann man die Gesamtzahl der Kugeln auf folgende zwei Arten finden: man zählt zuerst die Anzahl der Urnen; diese ist gleich der Summe von 7 und 9. Die Gesamtzahl der Kugeln ist dann das Produkt von 12 mit dieser Summe. Oder aber, man zählt zuerst die in den 7 Urnen enthaltenen Kugeln, deren Anzahl gleich ist dem Produkte von 12 mit 7; dann zählt man die in den 9 Urnen enthaltenen Kugeln, deren Anzahl gleich ist dem Produkt von 12 mit 9, und addiert die beiden so gefundenen Summen.

Auf diese Weise wird der folgende Satz ebenfalls sofort klar: Man multipliziert eine Zahl mit einer Differenz, indem man die Zahl mit dem Minuendus und dann mit dem Subtrahendus multipliziert und von dem ersteren Produkte das letztere abzieht.

Multipliziert man dieselbe Zahl mit zwei verschiedenen Zahlen, so sind die Produkte verschieden: dem größeren Multiplikator entspricht das größere Produkt.

8. Auf gleiche Weise läßt sich zeigen, daß man eine Summe oder eine Differenz mit einer Zahl multipliziert, indem man die einzelnen Teile der Summe oder der Differenz mit der Zahl multipliziert und die so gefundenen Teilprodukte zusammenzählt oder voneinander abzieht. Dieser Satz ist nur eine Konsequenz aus den vorhin ausgesprochenen Sätzen, und läßt sich aber auch aus einem anderen Satze ableiten, den wir sofort formulieren wollen. (Dieser neue Satz läßt sich ebenfalls aus dem in Nr. 7 ausgesprochenen Satze ableiten.)

9. Ein Produkt von 2 Faktoren ändert sich nicht, wenn man die Reihenfolge der Faktoren ändert.

Sind mehrere Zahlen in einer gewissen Reihenfolge gegeben, und multipliziert man die erste mit der zweiten, das so erhaltene Produkt mit der dritten usw. und endlich das vorletzte Produkt mit der letzten der gegebenen Zahlen, so *definieren* wir das auf diese Weise erhaltene Produkt als das Produkt aller gegebenen Zahlen: *dieses Produkt wird dasselbe bleiben, welches auch die Reihenfolge der gegebenen Zahlen sein mag.*

In einem Produkt mehrerer Zahlen kann man beliebige Faktoren durch ihr fertiges Produkt ersetzen. Um das Produkt mehrerer Faktoren mit einer Zahl zu multiplizieren, kann man einen dieser Faktoren mit der betreffenden Zahl multiplizieren.

Jede Zahl, die als das Produkt einer Zahl A mit einer natürlichen Zahl*) angesehen werden kann, nennt man das Vielfache von A.

10. Sind zwei Zahlen A und B gegeben, von denen die erste *Dividend* und die zweite *Divisor* (Teiler) heißt, so hat die Divison von A durch B zum Zwecke: 1. zu wissen, wie oft man B von A abziehen kann oder, wie man sich ausdrückt, zu wissen, wie oft B in A enthalten ist; die Zahl, die dieses „Wie oft" angibt, ist der *Quotient* der Division von A durch B; 2. zu wissen, welche Zahl übrig bleibt, wenn man diese Subtraktion ausgeführt hat: diese Zahl ist der *Rest* der Division.

Will man z. B. 189 durch 12 dividieren, so stelle man sich einen Haufen von 189 Kugeln vor, von dem man die Kugeln in Mengen von je 12 Stück wegnimmt und jedesmal in eine besondere Urne schüttet. Diese Operation setzt man so lange fort, bis weniger als 12 Kugeln übrig bleiben; die Zahl der Urnen, von denen jede 12 Kugeln enthält, ist der Quotient, sie ist in diesem Falle gleich 15, und es bleiben 9 Kugeln übrig; der Rest ist gleich 9. Es ist klar, daß der Dividend (189) gleich ist dem Produkt des Divisors (12) mit dem Quotienten (15) + dem Rest (9). Man kann sagen, daß die Division von A durch B bezweckt, A unter die Form einer Summe zu bringen, deren zweites Glied, der Rest, kleiner ist als der Divisor, und deren erstes Glied das größte Vielfache des Divisors ist, das nicht über den Dividend hinausgeht: dieses erste Glied ist das Produkt des Divisors mit dem Quotienten.

Wenn der Divisor B größer ist als der Dividend A, so ist der Quotient 0 und der Rest gleich dem Dividend. Wenn der Divisor 0 wäre, hätte die Operation keinen Sinn.

11. Ist der Rest einer Division 0, so ist der Dividend gleich dem Produkt des Divisors mit dem Quotienten: man sagt in dem Falle, daß die Division *aufgeht*, und den Quotienten bezeichnet man als genau. Der Dividend ist dann ein Vielfaches des Divisors; man sagt auch, daß er durch den Divisor teilbar ist.

---

*) Ich bezeichne als *natürliche* Zahl irgendeine beliebige unter den Zahlen 1, 2, 3, . . . mit Ausnahme von 0. Wenn ich *ganze* Zahl sage, schließe ich 0 nicht aus; übrigens wird die Bezeichnung *ganz* auch auf die negativen Zahlen angewendet werden.

Wenn man den Dividend und den Divisor mit derselben Zahl A multipliziert, so ist der Quotient der Produkte gleich dem Quotienten der beiden ursprünglichen Zahlen (Dividend und Divisor); der Rest der neuen Division ist das Produkt des ursprünglichen Restes mit der Zahl A.

Wenn der Dividend und der Divisor durch dieselbe Zahl A teilbar sind, ist der Rest es auch; dividiert man den Dividend und den Divisor durch diese Zahl, und beginnt man dann die Division von neuem, so bleibt der Quotient derselbe, der Rest aber ist durch die Zahl A dividiert.

§ 2. Verhältnis zweier Größen. — Gewöhnliche Brüche. Verallgemeinerte Brüche.

12. Die ganzen Zahlen dienen nicht nur dazu, Gesamtheiten verschiedener Gegenstände zu zählen, sie ermöglichen es auch, stetige Größen, wie Länge, Zeit u. a. wenigstens annähernd zu berechnen.

Ich werde in meinen Beweisführungen gewöhnlich mit Längen von begrenzten geraden Linien operieren; der Leser wird jedoch leicht erkennen, daß diese Beweisführungen sich fast ohne Abänderung auf andere Arten von Größen anwenden lassen, Größen, von denen man weiß, was man sich unter zwei gleichen Größen und der Summe oder dem Unterschied zweier Größen vorzustellen hat, was es endlich bedeutet, wenn man sagt, daß man eine Größe in eine gewisse Anzahl gleicher Teile teilt. Alle diese Begriffe sind vollständig klar, wenn es sich um begrenzte gerade Linien (oder geradlinige Strecken) handelt: die Summe der Längen mehrerer Strecken erhält man, indem man sie aneinanderreiht, der Unterschied zweier Strecken P, Q, von denen die erstere größer sein soll als die zweite, ist eine Strecke R, die man zu Q hinzufügen muß, um P wieder zu erhalten; es ist also nicht schwierig, dieselbe zu konstruieren.

13. Betrachten wir eine geradlinige Strecke A; um deren Länge zu *messen*, nimmt man als *Einheit* eine bestimmte Größe derselben Art, eine Strecke B (ein Meter, ein Zentimeter ...), und trägt diese Einheit B auf die Strecke A, in ununterbrochener Aufeinanderfolge vom Anfangspunkte an auf; auf diese Weise kann es vorkommen, daß die Strecke A durch eine gewisse Zahl von Längen B ganz genau bedeckt wird; diese ganze Zahl ist dann das Maß der Länge A. Für nebenstehende

Fig. 2.

Figur ist diese Zahl 5; ist die Längeneinheit das Zentimeter, so sagt man, die Länge A betrage 5 cm oder enthalte genau 5 cm.

14. Wenn man auf die gerade Linie A vom Anfangspunkt aus die Strecke B aufträgt, kann es auch vorkommen, daß man den Endpunkt nicht genau erreicht. Dieser fällt z. B. zwischen 5 mal und 6 mal die Länge B. Die Zahlen 5 und 6 sind in diesem Falle nur Näherungswerte der Länge A. Die erste ist ein unterer, die zweite ein oberer Näherungswert; der Fehler beträgt in beiden Fällen weniger als eine Einheit.

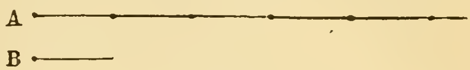


Fig. 3.

15. In diesem Falle kann man die Einheit B von neuem in eine gewisse Anzahl gleicher Teilchen, 7 zum Beispiel, zerlegen, und suchen, wieviel mal die Strecke A eines dieser Teilchen enthält. Es kann geschehen, daß eines dieser Teilchen genau so und so viel mal, z. B. 38 mal in derselben enthalten ist; man sagt dann, daß die Strecke A genau achtunddreißig Siebentel einer Einheit enthält oder daß dessen Länge durch den *Bruch* $\frac{38}{7}$ gemessen wird.

16. Ein Bruch ist ein System zweier natürlicher Zahlen, durch das eine Größe mittels einer Größe derselben Art, die als Einheit angesehen wird, berechnet werden kann: durch die eine dieser Zahlen, den *Nenner* (den man unten setzt), wird angegeben, in wieviel gleiche Teile man die Einheit geteilt hat; die andere, der *Zähler* (den man oben setzt), sagt aus, wieviel Teile der Einheit die Größe, die man messen will, enthält.

17. Man merke sich, daß der Gebrauch der Brüche beim Messen einer Größe einer Änderung der Einheit gleichkommt; wenn man im vorhergehenden Beispiel als Einheit ein Siebentel der Länge B nähme, würde die Länge A durch die Zahl 38 gemessen; und das versteht man eben darunter, wenn man sagt, daß die Länge A durch den Bruch $\frac{38}{7}$ gemessen wird. Desgleichen, wenn man die Stunde als Einheit nimmt, mißt man eine Dauer von 13 Minuten durch die Zahl $\frac{13}{60}$.

18. Kehren wir zu den Längen A, B zurück; ich habe vorhin angenommen, daß der siebente Teil der Einheit B genau 38 mal in der Strecke A enthalten sei. Legen wir auf die Strecke A vom Anfangspunkt desselben aus, in ununterbrochener Aufeinanderfolge Längen auf, die dem siebenten Teil von B gleichkommen, so kann der Fall eintreten, daß man den Endpunkt von A nicht genau erreicht; angenommen z. B., dieser Endpunkt falle zwischen achtunddreißig Siebentel und neununddreißig Siebentel von B, so sind die beiden Brüche $\frac{38}{7}$ und $\frac{39}{7}$ Maße von Längen, deren Unterschied von A weniger als das Siebentel von B ausmacht und die also annähernd den Wert von A bezeichnen; der erste ist ein unterer, der zweite ein oberer Näherungswert; in beiden Fällen ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{7}$ von B. Man sieht, daß, wenn man die Einheit in eine sehr große Anzahl gleicher Teile teilt, jeder einzelne dieser Teile sehr klein sein wird; der Fehler, den man begeht, indem man die Länge, die man messen will, durch einen Näherungswert ersetzt, wird also auch geringfügig sein; er kann so geringfügig sein, daß er mit unseren Meßinstrumenten nicht mehr wahrzunehmen ist, vorausgesetzt, daß man die Einheit in genügend kleine Teile zerlegt hat, und es wird in der Praxis gestattet sein, sich nicht weiter um diesen Fehler zu kümmern. Theoretisch kann man vermittelst der Brüche das Maß jeder beliebigen Größe mit einem beliebigen Grade von Annäherung ausdrücken; praktisch sind dieser Annäherung Grenzen gesetzt durch die Unvollkommenheit unserer Meßinstrumente und die Ungenauigkeit der Größen, die man messen will. Denn es gibt in Wirklichkeit weder gerade Linien, noch mathematische Punkte, die sie genau abgrenzen. Diese Gegenstände haben nur eine ideelle Existenz.

Man sieht die *Brüche* als *Zahlen* an.

19. Es genügt, an das vorhergehende Beispiel zu denken, um einzusehen, daß zwei Brüche, die denselben Nenner haben, nur als Maße derselben Länge gelten können, wenn ihre Zähler identisch sind. Haben sie denselben Nenner, aber verschiedene Zähler, so entspricht derjenige, der den größeren Zähler hat, der größeren Länge; man sagt dann, dieser sei der größere von beiden; so z. B. ist der Bruch $\frac{40}{7}$ das Maß einer Länge, die man erhält, indem man an das Ende der durch die Zahl $\frac{38}{7}$ gemessenen Strecke eine andere Strecke ansetzt, deren Länge durch die Zahl $\frac{2}{7}$ gemessen wird. Man sieht auch, daß, wenn zwei Längen durch zwei Brüche mit gleichem Nenner gemessen werden, die *Summe* dieser Längen als Maß einen Bruch hat, der denselben Nenner wie die beiden erwähnten Brüche und zum Zähler die Summe der Zähler beider Brüche hat. Eine ähnliche

Regel gilt für die *Differenz* zweier Längen, die als Maß Brüche mit dem gleichen Nenner haben.

20. Man nennt *Verhältnis* zweier Größen A, B und bezeichnet durch das Symbol $\frac{A}{B}$ (A und B bezeichnen einfachhin die beiden Größen) diejenige (ganze oder gebrochene) Zahl, die A mißt, wenn man B als Einheit nimmt.

Obschon das, was ich eben gesagt habe, zum vollen Verständis dieses Grundbegriffes ausreicht, will ich doch etwas zurückgreifen, indem ich mich auf einen anderen Standpunkt stelle, der sich übrigens nur sehr wenig von dem früheren unterscheidet.

21. Man nennt *gemeinsames Maß* zweier Größen derselben Art eine andere Größe derselben Art, die genau eine ganze Anzahl von Malen in jeder der beiden Größen enthalten ist.

Nehmen wir z. B. zwei Längen A, B; die Länge C ist ein gemeinsames Maß dieser zwei Längen, weil sie genau 17 mal in A und 6 mal in B enthalten ist.

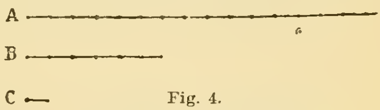


Fig. 4.

Das Verhältnis zweier Größen A, B, die ein gemeinsames Maß C zulassen, wird durch einen Bruch ausgedrückt, dessen Zähler angibt, wie oft das gemeinsame Maß in A enthalten ist, und dessen Nenner angibt, wie oft es in B enthalten ist.

In dem Beispiel, das wir eben vor uns hatten, ist das Verhältnis $\frac{A}{B}$ gleich $\frac{17}{6}$; das Verhältnis $\frac{B}{A}$ der Größe B zu der Größe A ist natürlich $\frac{6}{17}$; jeder der beiden Brüche $\frac{17}{6}$, $\frac{6}{17}$ wird als der *umgekehrte Wert* des anderen bezeichnet.

Die vorhergehende Definition schließt den Fall nicht aus, wo das gemeinsame Maß eine der Größen A, B ist, z. B. die Größe B, die dann genau so und so vielmal (durch eine ganze Zahl ausgedrückt), in der Größe A enthalten ist. So z. B. ist in nebenstehender Figur die Länge B genau 3 mal in der Länge A enthalten; das Verhältnis von A zu B wird durch den Bruch $\frac{3}{1}$ bezeichnet. Da andererseits die Zahl, die A mißt, wenn man B als Einheit nimmt, augenscheinlich die ganze Zahl 3 ist, so kann man, wie man sieht, jeden Bruch, dessen Nenner 1 ist, als identisch ansehen mit einer ganzen Zahl, die nichts anderes ist als der Zähler des genannten Bruches. Das

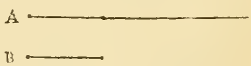


Fig. 5.

Verhältnis $\frac{A}{B}$ ist gleich $\frac{1}{3}$; von den beiden Zahlen 3 oder $\frac{3}{1}$ und $\frac{1}{3}$ sagt man, die eine sei die *umgekehrte* der anderen.

22. Wenn zwei Größen eine gemeinsame Maßeinheit haben, nennt man sie *kommensurabel*, im entgegengesetzten Falle *inkommensurabel.* Die Entwicklung der Wissenschaft hat die Existenz inkommensurabler Größen außer Zweifel gesetzt, und die Betrachtung der Irrationalzahlen, vermittelst derer man ihr Verhältnis ausdrückt, hat einen hohen theoretischen Wert. Praktisch hingegen ist diese Betrachtung fast nutzlos; denn, wie oben erklärt wurde, kann man an die Stelle einer dieser Größen eine andere Größe setzen, die nur äußerst wenig davon verschieden ist und die eine gemeinsame Maßeinheit mit der anderen hat; man erhält auf diese Weise einen annähernden Wert des Verhältnisses beider Größen, den man mit einem beliebig geringen Fehler ihrem eigentlichen (irrationalen) Verhältnis substituieren kann. Faktisch spricht man von inkommensurablen Größen nur mehr in den rein ideellen Wissenschaften, wie z. B. in der Geometrie oder in der rationellen Mechanik. Man nimmt keine Waren an, deren Preis oder deren Gewicht mit dem Franken oder dem Gramm inkommensurabel sind.

23. Das Verhältnis zweier kommensurabler Größen A, B, oder der Bruch, der das Maß der ersten dieser Größen bildet, wenn man die andere als Einheit nimmt, kann eine unendliche Menge Formen annehmen: denn es ist klar, daß, wenn die beiden Längen A, B eine gemeinsame Maßeinheit C zulassen, sie ebenfalls als gemeinsame Maßeinheit jede beliebige Länge D zulassen, die in C eine ganze Zahl mal enthalten ist.

Sagt man z. B., wie in Nr. 20, daß das Verhältnis $\frac{A}{B}$ gleich $\frac{17}{6}$ ist, so will das sagen, es existiere eine Länge C, die genau 17 mal in A, 6 mal in B enthalten ist. Teilt man nun C in fünf Teile, die gleich D sind, ebenso jeden der 17 Teile von A in fünf gleiche Teile, die gleich C sind, sowie jeden der sechs Teile von B, die auch gleich C sind, so ist klar, daß D dann eine gemeinsame Maßeinheit von A und B ist; sie ist in A 17×5, und in B 6×5 mal enthalten. Man kann das Verhältnis $\frac{A}{B}$ also gerade so gut durch den Bruch $\frac{5 \times 17}{5 \times 6}$ wie durch den Bruch $\frac{17}{6}$ ausdrücken.

24. Daraus geht hervor, daß zwei Brüche, von denen einer als Glieder gleiche Vielfache der Glieder des anderen hat (der also durch

Multiplikation der Glieder des anderen mit einer und derselben Zahl entstanden ist), als Maße derselben Länge zu betrachten sind.

25. Es ist natürlich, zwei Brüche, die als Maße derselben Länge gelten, als gleich anzusehen; im besonderen sind zwei Brüche, von denen einer als Glieder gleiche Vielfache der Glieder des anderen hat, als gleich anzusehen.

Es bietet jetzt keine Schwierigkeit mehr, die Bedingung zu finden, die notwendig und hinreichend ist, um zwei Brüche als gleich, das heißt als Maße derselben Länge bezeichnen zu können: wir haben oben gesehen, daß zwei Brüche, die denselben Nenner haben, als Maße derselben Länge nur einzusehen sind, wenn sie auch dieselben Zähler haben. Haben die beiden Brüche nicht denselben Nenner, so multipliziere man die beiden Glieder eines jeden mit dem Nenner des andern; so erhält man zwei neue Brüche mit gleichem Nenner, die nach Nr. 23 als Maße derselben Längen anzusehen sind wie die ersten Brüche; damit beide eine und dieselbe Länge darstellen, ist es notwendig und hinreichend, daß ihre Zähler gleich seien (Nr. 19). Daraus schließt man auf folgende Regel, die, wenn man will, als abstrakte Definition der Gleichheit zweier Brüche dienen kann:

Zwei Brüche sind gleich, wenn das Produkt des Zählers des ersten mit dem Nenner des zweiten gleich ist dem Produkte des Zählers des zweiten mit dem Nenner des ersten.

Diese Definition läßt sich auch auf den Fall anwenden, wo der Nenner einer dieser Brüche 1 ist, das heißt wenn dieser Bruch eine ganze Zahl wird. Eine ganze Zahl ist gleich einem Bruch, wenn das Produkt dieser ganzen Zahl mit dem Nenner des Bruches dem Zähler des Bruches gleich ist; oder auch: ein Bruch, dessen Zähler genau durch den Nenner teilbar ist (Nr. 11), ist gleich dem (genauen) Quotienten der Division. Ein Bruch, dessen beide Glieder gleich sind, ist gleich 1.

Zwei Brüche, die einem dritten gleich sind, sind auch einander gleich, da sie ja dieselbe Länge wie dieser dritte darstellen.

Daraus geht hervor, daß die Glieder dieser beiden Brüche sicher der notwendigen und hinreichenden Bedingung, die oben für die Gleichheit zweier Brüche angegeben ist, Genüge leisten: es wäre dies leicht durch rein arithmetische Erwägungen festzustellen: auch bei den Definitionen der Operationen an Brüchen, von denen weiter unten die Rede sein wird, kann man durch rein arithmetische Erwägungen verifizieren, daß man immer dieselben Resultate erhält, wenn man in irgendwelcher Operation einen Bruch durch einen andern ersetzt, der ihm gleich ist. Aber diese Verifikationen sind nicht notwendig, wenn man auf dem konkreten Standpunkt bleibt, den ich hier angenommen habe: Denn eine jede dieser Operationen an den Brüchen wird das Maß einer Größe ausdrücken, die man vermittelst der Größen konstruiert, deren Maße eben die betreffenden Brüche sind, und es wird jedesmal genügen, daran zu denken, daß Brüche, die dieselbe Größe darstellen, notwendigerweise gleich sind.

26. Ehe wir zu diesen Operationen kommen, bemerke ich noch, daß oben ein Mittel angegeben wurde, zwei Brüche auf denselben Nenner zu bringen, das heißt, sie durch zwei andere Brüche zu ersetzen, die denselben Nenner haben, und den zwei ersten bzw. gleich sind: dadurch, daß man zwei Brüche auf denselben Nenner bringt, ist es möglich, zu entscheiden, ob die beiden gegebenen Brüche gleich sind, oder, wenn sie verschieden sind, welcher von beiden der größte ist. Eben aus dieser Regel geht auch hervor, daß von zwei Brüchen mit gleichem Zähler derjenige, der den größten Nenner hat, der kleinste ist; außerdem sieht man auch, daß er eine geringere Länge darstellt als diejenige, deren Maß der andere Bruch ist. Daraus folgt: Wenn von zwei Brüchen, die auf denselben Nenner gebracht worden sind, der erste größer ist als der zweite, so ist der umgekehrte Wert des ersten kleiner als der umgekehrte Wert des zweiten.

Man kann eine beliebige Anzahl Brüche auf denselben Nenner bringen.

27. Als Summe zweier oder mehrerer Brüche definiert man einen Bruch, der demjenigen gleich ist, den man erhält, wenn man die gegebenen Brüche auf denselben Nenner bringt und dann einen Bruch bildet, dessen Nenner eben dieser gemeinschaftliche Nenner der neuen Brüche ist, während der Zähler durch die Summe ihrer Zähler gebildet wird. Die Summe dieser Brüche ist das Maß (Nr. 19) der Summe der Größen, die durch die gegebenen Brüche dargestellt werden. Eine entsprechende Definition und eine entsprechende Regel kann man auf den Unterschied zweier Brüche anwenden, von denen man annimmt, daß der zweite kleiner ist als der erste oder ihm gleich ist. Diese Definitionen und Regeln lassen sich auch anwenden, wenn der Nenner eines beliebigen dieser Brüche gleich 1 ist, das heißt, wenn dieser Bruch sich auf eine ganze Zahl reduziert.

Angenommen, man habe nur mit Brüchen zu tun, die denselben Nenner haben, so sieht man gleich, daß alle Lehrsätze über die Summen oder Unterschiede von ganzen Zahlen, die in Nr. 2, 3, 4, 5 erwähnt wurden, sich direkt auch auf die Brüche anwenden lassen.

28. Ist ein Bruch größer als 1, in anderen Worten, ist dessen Zähler größer als dessen Nenner, so kann man ihn ansehen als die Summe einer natürlichen Zahl und eines echten Bruches (also eines Bruches, der kleiner ist als 1), mit demselben Nenner wie der gegebene: es genügt, zu dem Zwecke den Zähler durch den Nenner zu dividieren (Nr. 10). Der vorliegende Bruch ist die Summe des Quotienten und eines Bruches, der denselben Nenner wie er selbst, und zum Zähler den Rest der Division hat. Der Quotient ist der *ganze Teil* des vorliegenden Bruches.

29. Betrachten wir drei Brüche, die gleich $\frac{2}{5}$ sind; ihre Summe ist nach der Regel der Addition gleich einem Bruch, dessen Nenner 5, und dessen Zähler 3 mal 2 beträgt. Der Bruch $\frac{2 \times 3}{5}$, den man so bildet, ist das Maß einer Größe oder einer Länge, wenn man so sagen will, die 3 mal größer ist als die Länge, welche durch den Bruch $\frac{2}{5}$ gemessen wird; man kann also sagen, daß der Bruch $\frac{2 \times 3}{5}$ 3 mal größer ist als der Bruch $\frac{2}{5}$, und daß dieser 3 mal kleiner ist als der erste.

Wenn man den Zähler eines Bruches durch 2, 3, 4, ... multipliziert, macht man ihn 2, 3, 4, ... mal größer. Und umgekehrt, wenn der Zähler eines Bruches durch eine natürliche Zahl teilbar ist, und man führt die Division des Zählers durch diese Zahl aus, so macht man den Bruch 2, 3, 4, ... mal kleiner, je nachdem die Zahl, durch die man dividiert, 2, 3, 4, ... ist.

30. Das Gegenteil trifft zu, wenn man den Nenner eines Bruches mit einer natürlichen Zahl multipliziert oder durch dieselbe dividiert. Nehmen wir zum Beispiel die Brüche $\frac{2}{5}$ und $\frac{2}{5 \times 3}$; addiert man drei Brüche, die dem zweiten gleich sind, so erhält man den Bruch $\frac{2 \times 3}{5 \times 3}$, der gleich $\frac{2}{5}$ ist (Nr. 25). Der Bruch $\frac{2}{5}$ ist also das Maß einer Größe, welche die Summe dreier unter sich gleicher Größen repräsentiert, wovon jede durch den Bruch $\frac{2}{5 \times 3}$ gemessen wird; oder, indem man dieselben Ausdrücke wie vorher gebraucht: Der Bruch $\frac{2}{5}$ ist 3 mal größer als der Bruch $\frac{2}{5 \times 3}$, dieser aber ist 3 mal kleiner als der erste.

Drei Brüche, von denen jeder gleich $\frac{2}{5}$ ist, addieren, ist der Definition gemäß dasselbe, wie den Bruch $\frac{2}{5}$ mit der natürlichen Zahl 3 multiplizieren. Um einen Bruch mit einer natürlichen Zahl zu multiplizieren, multipliziert man dessen Zähler mit dieser Zahl, oder, *wenn diese Operation aufgeht*, dividiert man dessen Nenner durch diese Zahl. Im besonderen kann der Bruch $\frac{2}{5}$ selbst als das Produkt von $\frac{1}{5}$ mit 2 betrachtet werden. Jeder Bruch ist das Produkt seines umgekehrten Nenners mit seinem Zähler.

31. Einen Bruch bilden, der 3 mal kleiner sein soll als $\frac{2}{5}$, das heißt, einen Bruch, der eine Größe mißt, die 3 mal kleiner ist als diejenige, deren Maß der Bruch $\frac{2}{5}$ ist, oder, anders ausgedrückt, einen Bruch, den man 3 mal wiederholen oder den man mit der natürlichen Zahl 3 multiplizieren muß, um als Resultat $\frac{2}{5}$ zu erhalten, ist der Definition gemäß dasselbe, wie den Bruch $\frac{2}{5}$ genau*) durch 3 dividieren. Um einen Bruch genau durch eine natürliche Zahl zu dividieren, multipliziert man dessen Nenner durch diese Zahl oder, wenn es möglich ist, dividiert man den Zähler genau durch diese Zahl.

32. Diese Regel ist sogar dann anwendbar, wenn der gegebene Bruch zum Nenner 1 hat, also eine natürliche Zahl ist. $\frac{2}{1 \times 3}$ oder $\frac{2}{3}$ ist demnach als eine Zahl zu betrachten, die 3 mal kleiner ist als $\frac{2}{1}$ oder 2, und wirklich ist 2 die Summe dreier Brüche, die gleich $\frac{2}{3}$ sind, da ja diese Summe gleich $\frac{2 \times 3}{3}$ oder $\frac{2}{1}$ ist. Eine Länge von 2 m ist die Summe von 3 Längen, von denen jede $\frac{2}{3}$ m beträgt. In andern Worten, zwei Drittel Meter sind dasselbe wie ein Drittel von zwei Metern.

Eine ganze oder eine gebrochene Zahl durch 2, 3, 4, 5 ... dividieren, heißt auch die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel, ein Fünftel ...

---

*) Man läßt oft in der Praxis das Wort *genau* aus; tut man dies, so darf man jedoch nicht vergessen, daß ein wesentlicher Unterschied besteht zwischen der jetzigen Bedeutung der Wörter *dividieren*, *Division* und derjenigen, die man ihnen in Nr. 10, in der Theorie der ganzen Zahlen, beigelegt hat.

davon nehmen. Ein Bruch kann als der genaue Quotient der Division seines Zählers durch seinen Nenner angesehen werden.

33. Die Multiplikation eines Bruches oder die genaue Division eines Bruches durch eine Zahl ist bis jetzt nur für den Fall definiert worden, wo der Multiplikator oder der Divisor eine natürliche Zahl war. Es bleibt der Fall zu untersuchen, wo der Multiplikator oder der Divisor eine Bruchzahl ist.

Es ist leicht zu verstehen, was man damit ausdrücken will, wenn man sagt, eine Länge A betrage $\frac{4}{5}$ einer Länge B: teilt man die Länge B in 5 gleiche Teile, so ist die Länge A gleich 4 dieser Teile. Man kann auch sagen, daß A eine Länge ist, die als Maß die Zahl $\frac{4}{5}$ hat, wenn man B als Einheit nimmt; oder auch, daß A eine Länge ist, deren Verhältnis zu B $\frac{4}{5}$ ist. Nehmen wir an, indem wir eine bestimmte Einheit, z. B. das Zentimeter, voraussetzen, die Länge B habe als Maß die Zahl $\frac{2}{3}$; nach dem, was oben gesagt wurde, wird, wenn wir das Zentimeter als Maßeinheit beibehalten, ein Fünftel von B durch die Zahl $\frac{2}{3 \times 5}$ gemessen werden, und A oder vier Fünftel von B durch die Zahl $\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$; der Bruch, den man auf diese Weise aus $\frac{2}{3}$ ableitet, indem man dessen Zähler mit 4 in dessen Nenner mit 5 multipliziert, heißt $\frac{4}{5}$ von $\frac{2}{3}$. Es ist auch das Produkt von $\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$.

Man nennt Produkt zweier Brüche den Bruch, der als Zähler das Produkt der Zähler der beiden gegebenen Brüche und als Nenner das Produkt der Nenner der beiden nämlichen Brüche hat. Diese Definition schließt als besondern Fall den Fall ein, wo der eine oder der andere der Brüche eine ganze Zahl ist.

34. Die vorhergehenden Auseinandersetzungen gestatten auch, folgenden Satz aufzustellen: Nehmen wir drei Größen derselben Art, A, B, C, drei Längen zum Beispiel, so ist die Zahl, die A mißt, wenn man C als Einheit annimmt, gleich dem Produkt der Zahl, die B mißt, wenn man C als Einheit annimmt, mit der Zahl, die A mißt, wenn man B als Einheit annimmt. In dem vorhergehenden Beispiel war C ein Zentimeter; die Zahl, die das Maß von B dar-stellte, als Einheit betrachtet, war $\frac{2}{3}$; die Zahl, die das Maß von A angab, B als Einheit betrachtet, war $\frac{4}{5}$.

In dieser Formulierung hat man die Reihenfolge der Brüche gemäß der Beweisführung spezifiziert, aber diese Reihenfolge ist völlig belanglos, da weder der Zähler noch der Nenner des Produkts ein anderer wird, wenn man diese Reihenfolge ändert (Nr. 9).

Denselben Satz kann man, um dem Gedächtnis zu Hilfe zu kommen, kürzer formulieren, und zwar folgendermaßen:

Das Verhältnis $\frac{A}{C}$ ist gleich dem Produkte des Verhältnisses $\frac{A}{B}$ mit dem Verhältnis $\frac{B}{C}$.

35. Hier einige Beispiele, die uns die Bequemlichkeit der für das Produkt zweier Brüche angenommenen Definition veranschaulichen.

Den Preis eines bestimmten Quantums einer Ware erhält man, indem man den Preis der Einheit dieser Ware mit der Zahl, die das Maß jenes Quantums bildet, multipliziert. So zum Beispiel ist der Preis einer bestimmten Länge Band gleich dem Preis eines Meters Band, multipliziert mit der Zahl, welche die gekaufte Länge mißt, das Meter als Einheit betrachtet. Desgleichen ist der Preis eines bestimmten Gewichtes Metall gleich dem Preis eines Grammes von diesem Metall, multipliziert mit der Zahl, die das Gewicht dieser Metallmenge mißt, wenn man das Gramm als Einheit annimmt. Diese Regeln sind nicht absolut zu nehmen: sie wenden sich zum Beispiel auf den Detailverkauf an; die Preise des Großhandels aber sind verschieden.

Die Masse*) eines bestimmten Volumens gleichartigen Stoffes ist gleich der Dichtigkeit**) dieses Stoffes, multipliziert mit der Zahl, die das Volumen dieses Stoffes mißt, das Kubikzentimeter als Einheit angesehen.

Die Länge des Weges, den ein sich gleichmäßig***) bewegender Körper durchläuft, ist gleich dem Produkt der Zahl, welche die Geschwindigkeit†) des sich bewegenden Körpers mißt, mit der Zahl, welche die Zeitdauer der Bewegung ausdrückt.

---

*) In der gewöhnlichen Umgangssprache sagt man Gewicht anstatt *Masse*. Die *Masse* ist die Zahl, die vermittelst der *Wage* bestimmt wird.

**) Das heißt die Masse eines Kubikzentimeters von diesem Stoff, das Gramm als Einheit betrachtet.

***) Unter gleichmäßiger Bewegung versteht man eine solche, die immer in derselben Richtung stattfindet, und bei der der Körper immer gleiche Entfernungen in gleichen Zeitabschnitten zurücklegt.

†) Das heißt die Länge, die während einer Zeiteinheit zurückgelegt wird.

36. Alle diese Sätze, die evident werden, wenn man mit ganzen Zahlen zu tun hat, und deren Beweis durch die in Nr. 33 gegebenen Erklärungen sehr leicht wird, veranschaulichen uns gut die auf der allgemeinen Formulierung beruhende Bequemlichkeit der für die Multiplikation der Brüche gewählten Definition. Das ist noch in höherem Maße der Fall für die Lehrsätze in Nr. 7, 8, 9 über die Möglichkeit, die Reihenfolge der Faktoren in einem Produkt zu ändern, die Faktoren zu gruppieren über die Art und Weise, wie man eine Summe mit einer Zahl oder eine Zahl mit einer Summe multipliziert; diese Lehrsätze kann man nämlich, kraft der angenommenen Definition, direkt auf den Fall anwenden, wo diese Zahlen Brü he sind.

37. Beiläufig sei noch bemerkt, daß, wenn man eine Zahl, sei es nun eine ganze oder eine gebrochene Zahl (nur nicht 0), mit zwei verschiedenen Zahlen multipliziert, man nach der Regel über die Multiplikation mit einer Summe zwei verschiedene Produkte erhält, wovon das größte dem größten Multiplikator entspricht; denn dieser ist nichts andres als die Summe des kleinsten Multiplikators und einer andern Zahl. Insbesondere ist das Produkt kleiner, gleich oder größer als der Multiplikator, je nachdem der Multiplikator kleiner, gleich oder größer als eins ist.

Aus der Definition der Multiplikation zweier Brüche geht natürlich hervor, daß das Produkt zweier Zahlen, von denen die eine das Umgekehrte der andern ist (Nr. 23), gleich 1 ist, und daß folglich in einem Produkte zwei Faktoren, von denen der eine das Umgekehrte des andern ist, gestrichen werden können.

38. Einen Bruch (Dividend) durch einen Bruch (Divisor) [genau*)] dividieren, heißt einen Bruch, Quotient genannt, finden, mit dem man den Divisor multiplizieren muß, um den Dividenden zu erhalten.

Angenommen, der Quotient existiere, so muß das Produkt dieses Quotienten mit dem Divisor gleich dem Dividenden sein; also muß das Produkt des Quotienten, des Divisors und des umgekehrten Divisors, das ja nach einer der letzten Bemerkungen nichts anderes ist als der Quotient, gleich sein dem Produkt des Dividenden mit dem umgekehrten Divisor: existiert also der Quotient, so ist er diesem Produkt gleich; da man nun, wenn dieses Produkt des Dividenden

*) Das Wort *genau* kann hier ohne Nachteil wegbleiben; wenn der Divisor ein Bruch ist, gebraucht man das Wort *dividieren* nur in dieser Bedeutung.

und des umgekehrten Divisors mit dem Divisor multipliziert wird, kraft derselben Bemerkung wieder den Dividenden findet, so ist dieses Produkt in Wirklichkeit der gesuchte Quotient.

So ist zum Beispiel das Resultat der Division von $\frac{2}{3}$ durch $\frac{4}{5}$ das Produkt der Multiplikation von $\frac{2}{3}$ mit $\frac{5}{4}$; es ist gleich $\frac{2 \times 5}{3 \times 4}$: es ist leicht zu verifizieren, daß das Produkt dieses Bruches mit $\frac{4}{5}$, oder $\frac{2 \times 5 \times 4}{3 \times 4 \times 5}$ gleich $\frac{2}{3}$ ist.

Der Fall, wo der Divisor eine natürliche Zahl ist, ist in dem allgemeinen Fall einbegriffen; es genügt, eine natürliche Zahl als einen Bruch anzusehen, dessen Nenner 1 ist

Der Quotient ist größer als der Dividend, dem Dividenden gleich oder kleiner als der Dividend, je nachdem der Divisor kleiner ist als 1, gleich 1 oder größer als 1, da ja der umgekehrte Divisor größer ist als 1, gleich 1 oder kleiner als 1.

Der (genaue) Quotient zweier Brüche, die denselben Nenner haben, ist ein Bruch, dessen beide Glieder durch die entsprechenden Zähler des Bruches, der Dividend ist, und des Bruches, der Divisor ist, gebildet werden.

39. Da die (genaue) Division durch eine Zahl der Multiplikation mit der umgekehrten Zahl gleichkommt, so lassen sich mehrere Eigenschaften der Division direkt aus den Eigenschaften der Multiplikation ableiten. Zum Beispiel: Um eine Summe oder eine Differenz durch eine Zahl zu dividieren, genügt es, die Glieder der Summe oder der Differenz durch dieselbe zu dividieren; anstatt eine Zahl nacheinander durch zwei andere zu dividieren, kann man sie durch deren Produkt dividieren usw.

40. Dividiert man eine Zahl durch zwei verschiedene Divisoren, so sind die Quotienten auch verschieden und der größte Quotient entspricht dem kleinsten Divisor, da ja der umgekehrte größte Divisor kleiner ist als der umgekehrte kleinste Divisor (Nr. 26) und das größte Produkt dem größten Multiplikator entspricht (Nr. 37).

41. Das Verhältnis zweier Größen derselben Art A, B, die man mißt, indem man die Größe C als Einheit annimmt, ist gleich dem (geauen) Quotienten der Zahlen, durch die die beiden Größen A, B gemessen werden.

Denn nehmen wir an, diese beiden Zahlen seien zwei Brüche, die man auf denselben Nenner gebracht habe, $\frac{2}{7}$ und $\frac{5}{7}$, zum Beispiel:

Das heißt, ein Siebentel der Einheit C ist genau 2 mal in A, 5 mal in B enthalten; es ist also eine Maßeinheit, die den beiden Größen A, B gemeinsam ist, und es genügt, auf die Definition (Nr. 23) zurückzugehen, um zu sehen, daß das Verhältnis $\frac{A}{B}$ gleich $\frac{2}{5}$, d. h. gleich dem (genauen) Quotienten der beiden Brüche ist. Wenn diese beiden nicht denselben Nenner hätten, brauchte man sie nur auf denselben Nenner zu bringen, um die Regel der Definition wiederzufinden.

Der vorhergehende Satz kann auch folgendermaßen formuliert werden: Die Zahl, die A mißt, wenn man B als Einheit nimmt, ist der (genaue) Quotient der Division derjenigen Zahlen, die die respektiven Maße von A und B bilden, *einerlei, welche Einheit man wählt.* Die Wichtigkeit des Begriffes Verhältnis besteht eben in der Eigenschaft, die das Verhältnis zweier Größen kraft seiner Definition (Nr. 20) hat, nämlich unabhängig zu sein von der Einheit, die man zum Messen der beiden Größen wählt.

42. Daraus folgt, daß man in der Bezeichnung $\frac{A}{B}$, die für das Verhältnis der Größe A zur Größe B steht, anstatt A und B als *Größen* anzusehen, sie auch als *Zahlen* ansehen kann, welche diese Größen messen, mit einer willkürlich gewählten Einheit, vorausgesetzt daß man dieses Symbol als den (genauen) Quotienten der *Zahl* A durch die *Zahl* B auffasse. Bis hierhin ist die Bezeichnung $\frac{A}{B}$, wenn A und B für Zahlen stehen, nur für den Fall angewendet worden, wo diese Zahlen natürliche Zahlen sind; nun haben wir aber in Nr. 32 gesehen, daß sie in diesem Fall als der (genaue) Quotient der Division der natürlichen Zahl A durch die natürliche Zahl B interpretiert werden kann: so zum Beispiel ist $\frac{2}{3}$ der (genaue) Quotient der Division von 2 durch 3. Nichts hindert uns also daran, die Bezeichnung $\frac{A}{B}$, in der A und B für ganze Zahlen oder Bruchzahlen stehen, so aufzufassen, als stelle sie den (genauen) Quotienten der Division von A durch B dar. Ein solcher Ausdruck ist ein *gewöhnlicher* Bruch, wenn A und B gewöhnliche Zahlen darstellen; ist wenigstens eine der Zahlen A, B ein Bruch, so heißt der Ausdruck $\frac{A}{B}$ ein *verallgemeinerter Bruch* oder ein *numerisches Verhältnis:* Der *Wert* desselben entspricht dem gewöhnlichen Bruch (oder der ganzen Zahl), den (oder die) man erhält, indem man die Division der Zahl A durch die Zahl B nach der Regel in Nr. 38 ausführt; ist z. B. $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{4}{5}$, so erhält man

$$\frac{A}{B}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)}=\frac{2\times 5}{3\times 4}=\frac{10}{12};$$

der Wert des Bruches $\frac{A}{B}$ ist $\frac{10}{12}$ oder $\frac{5}{6}$. Gemäß der Definition der Division kann man auch sagen, der Wert des Bruches $\frac{A}{B}$ sei eine Zahl, deren Produkt mit der Zahl B die Zahl A ergeben müsse.

43. In der Bezeichnung $\frac{A}{B}$ behält man die Namen Zähler und Nenner für die Zahlen A, B bei. Diese Bezeichnung ist sehr bequem, weil die meisten Eigenschaften der gewöhnlichen Brüche auch von den verallgemeinerten Brüchen ausgesagt werden können. So kann man die beiden Glieder eines verallgemeinerten Bruches mit derselben Zahl multiplizieren, ohne deren Wert zu ändern. Nehmen wir das vorhergehende Beispiel, in dem A und B gleich $\frac{2}{3}$ resp. $\frac{4}{5}$ waren; sage ich, der Wert des Bruches $\frac{A}{B}$ sei $\frac{5}{6}$, so heißt das:

$$\frac{2}{3}=\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}.$$

Wenn man die beiden Seiten dieser Gleichheit mit einer beliebigen Zahl (0 ausgenommen), z. B. mit $\frac{8}{7}$, multipliziert und die Faktoren der zweiten Seite richtig gruppiert, so erhält man die Gleichheit:

$$\frac{2}{3}\times\frac{8}{7}=\frac{5}{6}\times\left(\frac{4}{5}\times\frac{8}{7}\right),$$

deren zweite Seite das Produkt von $\frac{5}{6}$ mit der Zahl $\frac{4}{5}\times\frac{8}{7}$ darstellt. Nun aber bedeutet diese Gleichheit, daß $\frac{5}{6}$ auch der Wert eines verallgemeinerten Bruches ist, der als Zähler $\frac{2}{3}\times\frac{8}{7}$ und als Nenner $\frac{4}{5}\times\frac{8}{7}$ hat, und dessen Glieder man erhält, indem man die beiden Glieder des Bruches $\frac{A}{B}$ mit $\frac{8}{7}$ multipliziert. Es ist klar, daß man geradeso gut die beiden Glieder eines verallgemeinerten Bruches durch dieselbe Zahl dividieren kann.

Daraus geht hervor, daß man zwei oder mehrere verallgemeinerte Brüche auf denselben Nenner bringen kann, und zwar gemäß derselben Regel, die sich auf die gewöhnlichen Brüche bezieht. Man sieht auch, daß zwei verallgemeinerte Brüche unter derselben Bedingung gleich sind wie zwei gewöhnliche Brüche (Nr. 25). Die Verallgemeinerung der Regel über die Addition oder die Subtraktion verallgemeinerter Brüche mit gleichem Nenner geht aus einer Bemerkung hervor, die in Nr. 39 gemacht wurde.

44. Auch die Regel über die Multiplikation läßt sich auf die verallgemeinerten Brüche anwenden.

Nehmen wir zum Beispiel die beiden Brüche $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$, deren Wert $\frac{5}{6}$ resp. $\frac{11}{13}$ sind, das heißt:

$$A = \frac{5}{6} \times B, \quad A' = \frac{11}{13} \times B';$$

multipliziert man die entsprechenden Seiten der beiden Gleichheiten miteinander und gruppiert die Faktoren richtig auf der zweiten Seite, so erhält man:

$$A \times A' = \left(\frac{5}{6} \times \frac{11}{13}\right) \times (B \times B'),$$

und diese Gleichheit bedeutet, daß der Wert des verallgemeinerten Bruchs, der als Zähler das Produkt $A \times A'$ der Zähler der vorliegenden Brüche und als Nenner das Produkt $B \times B'$ der Nenner derselben Brüche hat, gleich ist $\frac{5}{6} \times \frac{11}{13}$, das heißt, dem Produkt der Werte der vorliegenden Brüche $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$.

45. Die Regel über die Division ist auch dieselbe wie für die gewöhnlichen Brüche und wird auf dieselbe Weise bewiesen. Es ist kaum nötig, zu bemerken, daß der umgekehrte Bruch $\frac{A}{B}$ gleich $\frac{B}{A}$ ist, und daß die Wert dieser Brüche umgekehrt sind.

46. In dem, was vorhergeht, habe ich den Fall ausgeschlossen, wo eines der Glieder eines gewöhnlichen oder verallgemeinerten Bruches 0 wäre. Der Fall kann beim Zähler, nie aber beim Nenner vorkommen. Ist der Zähler 0, nicht aber der Nenner, so hat das Symbol $\frac{A}{B}$ die Bedeutung 0. Ein Produkt, worin einer der Faktoren 0 ist, ist selbst gleich 0. Eine Division durch 0 endlich hat keinen Sinn.

§ 3. Proportionen.

47. Betrachten wir zwei Mengen*) von Zahlen, die sich gegenseitig entsprechen, zum Beispiel die beiden Gruppen

$$2,\ \frac{3}{4},\ 5,\ 7,\ \frac{8}{9},$$

$$\frac{6}{5},\ \frac{9}{20},\ 3,\ \frac{21}{5},\ \frac{8}{15},$$

in denen die sich entsprechenden Zahlen untereinander gesetzt worden sind.

Die Zahlen der zweiten Menge sind, wie man sich ausdrückt, *proportional* den Zahlen der ersten Menge, wenn, wie im vorhergehenden Beispiel, sie sich alle von den ihnen entsprechenden Zahlen der ersten ableiten lassen, und zwar dadurch, daß man sie mit demselben Faktor (der nicht 0 sein darf) multipliziert; diesen Faktor nennt man den Proportionalitätskoeffizienten; in dem vorliegenden Beispiel ist er $\frac{3}{5}$. Die Zahlen der ersten Menge würden sich ebensogut von den Zahlen der zweiten Menge ableiten lassen, nämlich dadurch, daß man sie mit der umgekehrten Zahl $\frac{5}{3}$ multiplizierte, so daß man sagen kann, die Zahlen der ersten Menge sind proportional mit denen der zweiten, oder kürzer, die beiden Mengen sind proportional.

48. Um den Proportionalitätskoeffizienten zu kennen, genügt es natürlich, zwei sich entsprechende Glieder in den beiden Mengen zu kennen: kennt man ihn, so kann man eine beliebige Zahl in die erste Menge einsetzen; multipliziert man diese Zahl durch den Koeffizienten, so erhält man die ihr entsprechende Zahl der zweiten Menge. Befindet sich unter den Gliedern der ersten Menge die Zahl 1, so ist die ihr entsprechende Zahl in der zweiten Menge der Proportionalitätskoeffizient.

Um eine Summe oder eine Differenz mit einer Zahl zu multiplizieren, kann man bekanntlich die Glieder der Summe oder der Differenz mit der betreffenden Zahl multiplizieren; daraus ersieht man, daß, wenn man zwei proportionale Mengen hat, man in die erste die Summe oder die Differenz zweier ihrer Glieder einsetzen kann, vorausgesetzt, daß man ihr in der andern Menge die Summe oder die Differenz der entsprechenden Glieder entsprechen lasse;

*) Dieses Wort bedeutet einfach Sammlung, Zusammenstellung usw. Das Wort *Reihenfolge* würde eine gewisse Ordnung voraussetzen, auf die hier nicht geachtet wird.

man kann auch in einer der Mengen ein beliebiges Glied mit einer beliebigen Zahl (mit Ausnahme von 0) multiplizieren oder durch dieselbe dividieren unter der Bedingung, daß man in der andern Menge das entsprechende Glied mit derselben Zahl multipliziere oder durch dieselbe dividiere.

49. Zwei beliebige Glieder a, b der ersten Menge bilden mit den entsprechenden Gliedern a', b' der zweiten Menge eine *Proportion*, d. h. das Verhältnis der Zahlen a, b ist dasselbe wie das Verhältnis der Zahlen a', b', was man folgendermaßen ausdrückt:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'};$$

das geht aus der Tatsache hervor, daß ein Verhältnis sich nicht ändert, wenn man dessen beide Glieder mit einer und derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe dividiert. Und umgekehrt: Hat man zwei Mengen von sich entsprechenden Zahlen und besteht zwischen zwei Zahlen a, b der ersten Menge und den ihnen entsprechenden Zahlen a', b' der zweiten Menge die Proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'},$$

so kann man behaupten, die beiden Mengen seien proportional; denn die vorhergehende Proportion kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b},$$

da die Bedingung der Gleichheit für die Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ dieselbe ist wie für die Brüche $\frac{a'}{a}$, $\frac{b'}{b}$, nämlich (Nr. 24, 43):

$$a \times b' = a' \times b.$$

Die zweite Form der Proportion zeigt, daß das Verhältnis zweier sich entsprechender Glieder $b'\,b$, die aus den beiden Mengen genommen sind, immer gleich ist dem Wert des Verhältnisses $\frac{a'}{a}$, einerlei, welche beiden Glieder man wählt; in andern Worten: man kann jedes Glied der zweiten Menge erhalten, indem man das ihm entsprechende Glied des ersten mit $\frac{a'}{a}$ multipliziert.

Der einfachste Fall der Proportionalität ist derjenige der Gleichheit, der Fall, wo alle Glieder der einen Menge den ihnen entsprechenden Gliedern der andern gleich sind.

50. Ist eine Menge von Zahlen gegeben, so kann man diese oft als Werte einer gewissen *Variablen (Veränderlichen)* ansehen, sei es nun, daß diese Veränderliche keine andern Werte annehmen kann als diejenigen dieser Menge, oder sei es, daß sie beliebige Werte annehmen kann. Betrachtet man zwei Mengen von einander *entsprechenden* Zahlen als einander *entsprechende* Werte zweier Veränderlichen, so sagt man von der einen Veränderlichen, sie sei eine *Funktion* der andern; dieses Wort bedeutet, daß jedem Werte der einen Veränderlichen ein Wert der andern *entspricht.* Sind die Werte der einen Veränderlichen proportional den Werten der andern, so sagt man, die eine Veränderliche sei der andern proportional; das heißt: der Wert der einen Veränderlichen ist immer gleich dem Produkt des Wertes der andern mit einer konstanten Zahl (dem Proportionalitätskoeffizienten) oder: das Verhältnis zweier Werte der ersten Veränderlichen ist immer gleich dem Verhältnis der entsprechenden Werte der zweiten.

51. So ist z. B. der Preis eines gewissen Quantums Ware oder vielmehr die Zahl, die diesen Preis ausdrückt, wenn man eine gewisse Münzeinheit, den Franken z. B. annimmt, proportional mit der Zahl, welche dieses Quantum mißt. Der Preis einer gewissen Art Band ist proportional mit der Zahl, welche die Länge dieses Bandes mißt. Nimmt man als Münzeinheit den Franken und als Längeneinheit das Meter, so ist die Zahl, die den Preis mißt, gleich der Zahl, die die Länge mißt, wenn der Preis eines Meters ein Frank ist*).

Die Zahl, welche die Masse eines gewissen Quantums gleichartigen Stoffes ausdrückt, ist proportional mit der Zahl, welche das Volumen dieses Stoffes ausdrückt: Der Proportionalitätskoeffizient ist die Dichtigkeit, d. h. die Zahl, welche die Masse der Volumeinheit ausdrückt; ist diese Dichtigkeit gleich 1, wie es der Fall beim Wasser ist (das Gramm als Masseneinheit und das Kubikzentimeter als Volumeinheit angenommen), so ist die Zahl, welche die Masse ausdrückt, dieselbe wie diejenige, welche das Volumen ausdrückt.

Die Zahl, welche den zurückgelegten Weg bei einer gleichmäßigen Bewegung ausdrückt, ist proportional der Zahl, welche die Zeit, während der dieser Weg zurückgelegt worden ist, ausdrückt. Nimmt man als Längeneinheit das Zentimeter und die Sekunde als Zeiteinheit, und ist die Geschwindigkeit 1 (durchläuft also der sich bewegende Körper einen Zentimeter in der Sekunde), so ist die Zahl,

*) Die Restriktionen aus Nr. 35 gelten hier.

welche den zurückgelegten Weg ausdrückt, dieselbe wie die Zahl, welche die Zeit ausdrückt.

52. Mißt man die Längen mit zwei verschiedenen Einheiten, z. B. mit dem Meter und dem Zentimeter, so sind die Zahlen, welche eine und dieselbe Länge messen, proportional: man kann die zweite Zahl von der ersten ableiten, indem man diese mit 100 multipliziert (Nr. 34).

53. Bis jetzt ist nur von Proportionalität zwischen *Zahlen* die Rede gewesen: wenn von Größen (Preisen, Längen, Zeitabschnitten) gesprochen wurde, nahm man immer an, daß diese Größen auf eine bestimmte Einheit zurückgeführt würden, und Zahlen drückten das Maß der betreffenden Größen aus. Man kann aber auch den Begriff der Proportionalität auf zwei Größen anwenden, unabhängig von den Einheiten, auf welche man sie zurückführt.

54. Nehmen wir zwei unbegrenzte Geraden (P), (P'), in einer und derselben Ebene gelegen, und eine andere unbegrenzte Gerade (R), die auch in dieser Ebene liegt und weder mit (P) noch mit (P') parallel ist.

Wir wählen nun zwei beliebige Punkte A, A' auf den beiden Geraden (P), (P'), und zwar so, daß die Gerade AA', die sie miteinander verbindet, parallel ist mit der Geraden (R), und sehen diese beiden Punkte als sich *entsprechend* an; das gleiche gilt von zwei Strecken, die auf den Geraden $(P)(P')$ liegen, wenn ihre Endpunkte sich entsprechen: so z. B. sind in der Figur, wo die Geraden AA', BB', CC', DD' mit der Geraden (R) parallel sind, die Strecken AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CD und $C'D'$, AC und $A'C'$ usw. einander entsprechend.

Die Strecken, die auf einer der Geraden liegen, sind mit den ihnen entsprechenden Strecken auf der anderen proportional. Darunter versteht man, daß das Verhältnis zweier Strecken, die auf der Geraden (P) liegen, gleich ist dem Verhältnis der ihnen entsprechenden Strecken der Geraden (P').

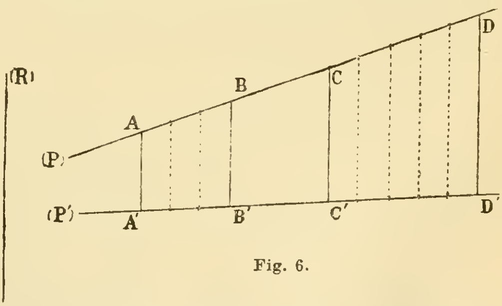


Fig. 6.

Um das zu beweisen, stellt man zuerst fest, daß zwei Strecken, die einander gleich sind und auf der Geraden (P) liegen, zwei andere

Strecken entsprechen, die auch einander gleich sind und auf der Geraden (P') liegen. Sehen wir diesen Satz als richtig an*) und beweisen wir z. B., daß das Verhältnis $\frac{AB}{CD}$ gleich ist dem Verhältnis $\frac{A'B'}{C'D'}$, der jenen entsprechenden Strecken. Angenommen, die beiden Strecken AB, CD hätten ein gemeinsames Maß, das 3 mal in AB, 5 mal in CD enthalten wäre; ziehen wir durch die Einteilungspunkte Parallelen zu (R), so sehen wir gleich, daß die Strecke $A'B'$ dadurch in drei gleiche Teile geteilt wird, und die Strecke $C'D'$ in fünf Teile, die den vorhergehenden gleich sind, so daß die beiden Strecken $A'B'$ und $C'D'$ ein (dem gemeinsamen Maß von AB und CD entsprechendes) gemeinsames Maß haben, das 3 mal in $A'B'$, 5 mal in $C'D'$ enthalten ist, und daß das Verhältnis $\frac{A'B'}{C'D'}$ gleich ist $\frac{3}{5}$, geradeso wie das Verhältnis $\frac{AB}{CD}$.

Betrachtet man Strecken, die auf (P) liegen, z. B. die Strecken AB, BC, CD, AC und die ihnen entsprechenden Strecken $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $A'C'$ der Geraden (P'), und mißt man alle diese Strecken mit einer und derselben Einheit, so bildet man zwei Mengen von augenscheinlich proportionalen Zahlen.

Der Proportionalitätskoeffizient, d. h. der Faktor, mit dem man alle Zahlen der ersten Menge multiplizieren müßte, um die Zahlen der zweiten Menge zu erhalten, ist weiter nichts als die Zahl, welche auf der Geraden (P') diejenige Strecke messen würde, die der auf die Gerade (P) aufgetragenen Längeneinheit entspricht.

Betrachtet man eine *veränderliche* Strecke AB, die auf der Geraden (P) liegt, und die ihr entsprechende Strecke $A'B'$ der Geraden (P'), so kann man sagen, daß die Strecke $A'B'$ der Strecke AB proportional ist.

---

*) Ich mache beiläufig darauf aufmerksam, daß die folgende Konstruktion zur Einteilung einer Strecke in eine beliebige Anzahl gleicher Teile sich auf diesen Satz stützt.

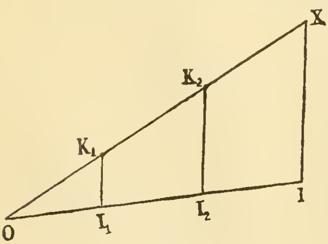


Fig. 7.

Es sei z. B. die Strecke OI in drei gleiche Teile einzuteilen. Auf eine beliebige Gerade, die durch den Punkt O geht, trägt man, vom Punkte O aus, nacheinander drei beliebige gleiche Längen OK_1, K_1K_2, K_2K_3 auf, dann verbindet man K_3 mit dem Punkte I und legt durch die Punkte K_1, K_2 Parallelen K_1I_1, K_2I_2 zu der Geraden K_3I; die Längen OI_1, I_1I_2, I_2I sind dann einander gleich.

Hier sind die sich entsprechenden Größen AB, $A'B'$ von derselben Art; es ist erlaubt, von ihrem Verhältnis zu sprechen, das konstant ist.

55. Betrachten wir jetzt einen Kreis mit dem Mittelpunkt O; jedem Mittelpunktswinkel, d. h. jedem Winkel, der seinen Scheitel im Mittelpunkt hat, entspricht ein zwischen seinen Schenkeln liegender Bogen; umgekehrt kann man jedem Kreisbogen einen Mittelpunktswinkel entsprechen lassen; so entsprechen sich gegenseitig die Mittelpunktswinkel AOB, BOD, DOC und die Bogen AB, BD, DC.

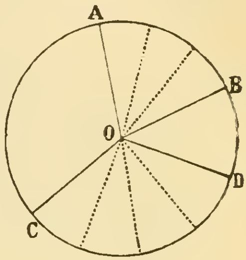


Fig. 8.

Die sich entsprechenden Mittelpunktswinkel und Bogen sind proportional, d. h. das Verhältnis zweier Winkel ist gleich dem Verhältnis der ihnen entsprechenden Bogen.

Denn es ist nicht schwer zu sehen, daß gleichen Mittelpunktswinkeln gleiche Bogen entsprechen, und umgekehrt. Nachdem dieses festgestellt ist, betrachten wir z. B. die beiden Winkel AOB, DOC und die beiden Bogen AB, DC, die ihnen entsprechen: zu beweisen ist, daß

$$\frac{\sphericalangle AOB}{\sphericalangle DOC} = \frac{\text{Bogen } AB}{\text{Bogen } DC}.$$

Angenommen, die Winkel AOB, DOC hätten ein gemeinsames Maß, derselbe Winkel wäre z. B. 3 mal im Winkel AOB, 4 mal im Winkel DOC enthalten, so genügt es, die Figur anzusehen, um zu konstatieren, daß diesem gemeinsamen Maß der beiden Winkel ein gemeinsames Maß der beiden Bogen entspricht, nämlich ein Bogen, der 3 mal im Bogen AB, 4 mal im Bogen DC enthalten ist, so daß das Verhältnis der Bogen $\frac{3}{4}$ ist, gerade wie das Verhältnis der Winkel.

Betrachtet man eine Reihenfolge von Mittelpunktswinkeln, z. B. die Winkel AOB, BOD, AOD, DOC und die ihnen entsprechenden Bogen AB, BD, AD, DC, so bilden die Zahlen, welche die Winkel messen, mit einer gewählten Winkeleinheit, und die Zahlen, welche die Bogen messen, mit einer gewählten Bogeneinheit, zwei proportionale Mengen.

Betrachtet man einen veränderlichen Winkel AOB und den ihm entsprechenden veränderlichen Bogen AB, so kann man sagen, daß der veränderliche Winkel dem ihm entsprechenden Bogen proportional ist.

56. Nimmt man in dem vorhergehenden Beispiel den Winkel DOC als Winkeleinheit und den ihm entsprechenden Bogen DC als Bogeneinheit, so hat die Gleichheit der beiden Verhältnisse $\frac{\sphericalangle AOB}{\sphericalangle DOC}$, $\frac{AB}{DC}$ die Bedeutung (Nr. 20), daß die Zahl, welche den Winkel AOB mißt, dieselbe ist wie die Zahl, welche den Bogen AB mißt. Das würde z. B. eintreffen, wenn man als Winkeleinheit den rechten Winkel und als Bogeneinheit das Viertel der Kreislinie nähme.

57. Man wählt oft als Winkeleinheit den *Grad*, das ist der 90. Teil des rechten Winkels, und als Bogeneinheit den 90. Teil des Viertels der Kreislinie oder den 360. Teil der Kreislinie; die Winkeleinheit und die Bogeneinheit entsprechen sich; die sich entsprechenden Winkel und Bogen werden durch dieselbe Zahl gemessen. Das Wort Grad läßt sich übrigens geradesogut auf den Bogen wie auf den ihm entsprechenden Winkel anwenden. Der Grad (eines Winkels oder eines Bogens) wird in 60 Minuten, die Minute (eines Winkels oder eines Bogens) in 60 Sekunden eingeteilt.

Man wählt auch wohl hier und da als Winkel- oder Bogeneinheit den *Zentesimalgrad*. Der Zentesimalgrad (Winkel) ist der 100. Teil des rechten Winkels und der Zentesimalgrad (Bogen) der 400. Teil des Kreisumfanges. Dem Dezimalsystem entsprechend teilt man den *Zentesimalgrad* wieder in 10 Teile, jeden dieser Teile wieder in 10 usw. Die Zahl, die den gewöhnlichen Grad mißt, wenn man den Zentesimalgrad als Einheit nimmt, ist $\frac{10}{9}$: hat man also das Maß eines Bogens in Graden, so braucht man bloß mit $\frac{10}{9}$ zu multiplizieren, um es in Zentesimalgrade zu verwandeln. Hat man umgekehrt das Maß in Zentesimalgraden, so multipliziert man mit $\frac{9}{10}$, um das Maß in gewöhnlichen Graden zu erhalten (Nr. 34).

58. Betrachtet man eine veränderliche Größe (einen Mittelpunktswinkel z. B.) und eine andere dieser entsprechende Größe (den zwischen den Schenkeln des Mittelpunktwinkels liegenden Bogen), so sagt man, die eine Größe sei proportional der anderen, wenn das Verhältnis zweier Größen der ersten Art immer gleich ist dem Verhältnis der beiden ihnen entsprechenden Größen der zweiten Art. Dies ist der Fall, wenn zwei gleichen Größen der ersten Art zwei gleiche Größen der zweiten Art entsprechen, und wenn der Summe zweier Größen der ersten Art immer die Summe zweier Größen der zweiten Art entspricht. Umgekehrt sind diese Bedingungen zur Proportionalität notwendig. Wenn zwei (veränderliche) Größen proportional sind, so ist die (veränderliche) Zahl, welche eine der beiden mißt, proportional der (veränderlichen) Zahl, welche die andere mißt. Diese Zahlen sind gleich, wenn die Einheit, mit der man eine der Größen mißt, der Einheit entspricht, mit der man die andere mißt.

§ 4. Dezimalbrüche.

59. Ein *Dezimalbruch* ist ein gemeiner Bruch, der zum Nenner die Einheit mit einer gewissen Anzahl Nullen hat; so z. B. sind $\frac{75}{1000}$, $\frac{7849}{100}$ Dezimalbrüche; bekanntlich werden sie gewöhnlich anders geschrieben: der Zähler wird ausgedrückt unter der Form einer ganzen Zahl, zu deren Rechten man durch ein Komma genau so viel Stellen, Dezimalstellen genannt, abtrennt, als es Nullen im Nenner des Bruches gibt; sind nicht Ziffern genug im Zähler, um den Bruch so auszudrücken, so schreibt man soviel Nullen zur Linken des Zählers, als hinreichen sind, um das Komma an die richtige Stelle zu setzen, so daß eine Null für den ganzen Teil übrigbleibt: die eben erwähnten Brüche werden also folgendermaßen ausgedrückt: 0,075 resp. 78,49. Man sagt in dem Fall, der Bruch sei unter der dezimalen Form ausgedrückt, und bezeichnet ihn oft mit dem Namen Dezimalzahl. Umgekehrt läßt sich ein so ausgedrückter Bruch leicht in einen gemeinen Bruch verwandeln. Im Vorübergehen sei bemerkt, daß man schreiben kann:

$$0{,}075 = \frac{7}{100} + \frac{5}{1000}; \quad 78{,}49 = 78 + \frac{6}{10} + \frac{9}{100}.$$

60. Der Wert eines Dezimalbruches bleibt derselbe, wenn man rechts von dem dezimalen Teil (oder *Mantisse*) eine beliebige Anzahl Nullen setzt.

Um mehrere Dezimalbrüche auf denselben Nenner zu bringen, genügt es, diejenigen Mantissen, die weniger Ziffern als die anderen haben, durch Nullen zu vervollständigen und so allen Mantissen dieselbe Anzahl von Stellen zu geben.

Die Regeln über Vergleichung, Addition, Subtraktion, Multiplikation der Dezimalzahlen, mit denen der Leser sicher vertraut ist, lassen sich mühelos von den Regeln über die gemeinen Brüche ableiten. Was die (genaue) Division anbetrifft, so bringt man, wie wir eben gesehen haben, zuerst den Dividenden und den Divisor auf einen gemeinschaftlichen Nenner; der genaue Quotient ist dann ein gemeiner

Bruch, dessen beide Glieder die Zähler des Dividenden und des Divisors sind; man hat vorher das Komma gestrichen und ihnen dieselbe Anzahl Dezimalstellen gegeben. Den (genauen) Quotienten erhält man auf diese Weise unter der Form eines gemeinen Bruches; will man ihn unter dezimale Form bringen, so sieht man sich vor das folgende Problem gestellt: *einen gemeinen Bruch in eine Dezimalzahl zu verwandeln.*

61. Das Problem, das darin besteht, eine Dezimalzahl zu finden, die einem gegebenen gemeinen Bruche gleich sei, ist nicht immer lösbar; aber man kann es mit einem beliebigen Grade von Genauigkeit lösen, d. h. man kann eine Dezimalzahl finden mit 1, 2, 3, 4, ... Dezimalstellen, die von dem gegebenen Bruch um weniger als $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ usw. verschieden ist; das nennt man den Näherungswert des gegebenen Bruches bis auf $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots$ feststellen: die Bedeutung dieser Ausdrucksweise wird übrigens bald etwas genauer auseinandergesetzt werden.

Nehmen wir an, der gegebene Bruch sei $\frac{8}{7}$, und suchen wir dessen Näherungswert bis auf $\frac{1}{10000}$ zu finden. Zuerst multipliziert man den Bruch $\frac{8}{7}$ mit 10000; nach der Regel in Nr. 28 erhält man, indem man den ganzen Teil vom Bruchteil trennt:

$$\frac{8}{7} \times 10000 = \frac{80000}{7} = 11428 + \frac{4}{7};$$

der übrigbleibende Bruch $\frac{4}{7}$ ist kleiner als 1, da 4 der Rest einer Division durch 7 und folglich kleiner als 7 ist; dividiert man nun die beiden Glieder der vorhergehenden Gleichheit durch 10000, oder multipliziert man sie mit $\frac{1}{10000}$, so findet man

$$\frac{8}{7} = 1{,}1428 + \frac{4}{7} \times \frac{1}{10000};$$

und diese Gleichheit enthält die Lösung des vorliegenden Problems, denn der Unterschied zwischen $\frac{8}{7}$ und der Zahl 1,1428, die 4 Dezimalstellen hat, ist gleich dem Produkt von $\frac{1}{10000}$ mit der Zahl $\frac{4}{7}$, die kleiner als 1 ist; folglich ist diese Differenz kleiner als $\frac{1}{10000}$

oder 0,0001. Fügt man 0,0001 zu der Zahl 1,1428 hinzu, so erhält man die Zahl 1,1429, die zwar größer als $\frac{8}{7}$, aber noch immer um weniger als 0,0001 von $\frac{8}{7}$ verschieden ist.

62. Der untere Näherungswert einer gegebenen Zahl A auf $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ genau ist eine Dezimalzahl mit 1, 2, 3, ... Stellen kleiner oder gleich A, und die von A um weniger als $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ oder, wie man auch wohl sagt, um weniger als eine Dezimaleinheit 1., 2., 3., ... Ordnung abweicht. Ist die Zahl A ein gewöhnlicher Bruch, so erhält man die verschiedenen unteren Näherungswerte dieses Bruches, indem man gemäß Nr. 10 die Division des Zählers durch den Nenner ausführt; der Quotient, den man erhält, der übrigens Null sein kann, ist der ganze Teil des Bruches oder sein unterer Näherungswert auf eine Einheit genau; rechts vom Quotienten setzt man ein Komma und fährt mit der Division fort, indem man an den Rest eine Null anhängt: der so erhaltene Teilquotient liefert die Zehntel; indem man an den neuen Rest eine Null anhängt, erhält man durch weiteres Dividieren die Hundertstel usw. Auf diese Weise kann man beliebig viele Stellen berechnen. Bricht man die Division ab, so stellt der erhaltene Quotient den unteren Näherungswert des Bruches auf $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ genau dar, je nachdem man 1, 2, 3, ... Dezimalstellen berechnet hat. Der Unterschied zwischen dem gegebenen Bruch und der als Quotient erhaltenen Dezimalzahl ist ein Bruch, der als Zähler den zuletzt gefundenen Rest hat und als Nenner den Nenner des gegebenen Bruches mit soviel Nullen, als man Stellen berechnet hat. Sollte der Rest je Null werden, so hat man den gegebenen Bruch genau in einen Dezimalbruch verwandelt.

63. Wird der Rest nie Null, so kann man die Division stets fortsetzen. Bricht man die Division ab, so erhält man den unteren Näherungswert; der begangene Fehler ist kleiner als eine Dezimaleinheit von der Ordnung der letzten Stelle. Erhöht man die letzte Stelle um 1, so erhält man einen oberen Näherungswert. Verwandelt man beispielsweise $\frac{4}{11}$ in einen Dezimalbruch, so erkennt man sofort, daß sowohl die Reste als auch die Dezimalstellen periodisch wiederkehren. Man erhält den endlosen Dezimalbruch 0,3636363636 .... Begnügt man sich mit 1, 2, 3, ... Stellen, so erhält man die Zahlen

$$u_1 = 0{,}3\,, \quad u_2 = 0{,}36\,, \quad u_3 = 0{,}363\,, \quad u_4 = 03636\,, \ldots,$$

die von $\frac{4}{11}$ um weniger als

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}$$

abweichen. Allgemein gefaßt, können wir uns folgendermaßen ausdrücken: Der Unterschied zwischen $\frac{4}{11}$ und der Zahl u_n (die man erhält, indem man n Stellen des Symbols 0,36363636... nimmt), ist kleiner als ein Bruch, der als Zähler die Einheit und als Nenner 1 mit n Nullen hat. Es leuchtet hiermit sofort ein, daß, wenn man n genügend groß macht, dieser Bruch kleiner werden kann als eine beliebig kleine vorgegebene Zahl ε: man braucht bloß n so groß zu wählen, daß die Zahl, die aus der Einheit mit n angehängten Nullen gebildet wird, größer ist als der umgekehrte Wert von ε.

Diesen Gedanken drückt man auch wohl noch so aus: Bei unbegrenzt wachsendem n hat die veränderliche Zahl u_n den Grenzwert $\frac{4}{11}$: d. h. die Zahl u_n stellt $\frac{4}{11}$ mit beliebiger Genauigkeit dar, oder auch, der Unterschied zwischen dieser Zahl und $\frac{4}{11}$ ist beliebig klein, sobald n genügend groß ist.

Betrachten wir desgleichen die Zahlen

$$v_1 = 0{,}4, \quad v_2 = 0{,}37, \quad v_3 = 0{,}364, \quad v_4 = 0{,}3637\ldots,$$

die man aus u_1, u_2, u_3, $u_4 \ldots$ durch Erhöhung der letzten Stelle gewinnt. Diese Zahlen stellen die oberen Näherungswerte von

$$\frac{4}{11} \quad \text{auf} \quad \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots$$

genau dar. Man kann hier ebenfalls sagen, daß die veränderliche Zahl v_n bei unendlich wachsendem n $\frac{4}{11}$ als Grenzwert hat.

64. Das Rechnen mit Dezimalzahlen ist bequemer als das Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen. Denn die Operationen an Dezimalzahlen gestalten sich fast genau so wie an ganzen Zahlen. Was die Division anbelangt, so ist zu bemerken, daß dieselbe nicht immer genau aufgeht. Allein wir haben schon in Nr. 22 darauf hingewiesen, daß man in der Praxis stets mit unvollständigen Zahlen rechnet. Man wird also gut tun, solche Zahlen dennoch in Dezimalbrüche zu verwandeln. Sollte es sich um einen genau zu bestimmenden Quotienten handeln, so wird man einen genügend genauen Näherungswert nehmen. Die Rechnungen werden sich um so einfacher gestalten, je weniger charakteristische*) Ziffern die Zahlen haben, und es empfiehlt sich, so wenig Dezimalstellen wie möglich zu nehmen, um die Rechnungen nicht unnützerweise zu erschweren.

Dieses Problem und die Regel, die seine Lösung gestatten, bilden einen Teil der *Fehlertheorie*; ich werde noch einmal in Nr. 127 darauf zurückkommen. Ich will jetzt bloß erwähnen, daß man unter *absolutem* Fehler den Unterschied zwischen der genauen Zahl und ihrem Näherungswert versteht. Dieser Fehler ist positiv oder negativ, je nachdem der Näherungswert kleiner oder größer als die genaue Zahl ist. Unter *relativem* Fehler versteht man das Verhältnis des absoluten Fehlers und der genauen Zahl. Sagt man, man *kenne* die ersten Ziffern einer Zahl A, so versteht man darunter, daß der (absolute) Fehler, den man begeht, indem man A durch die mit diesen Ziffern gebildete Zahl ersetzt, kleiner ist als eine Dezimaleinheit der letzten bekannten Ziffer. Handelt es sich um eine ganze Zahl, so ersetzt man gewöhnlich die unbekannten Ziffern durch Nullen. Spricht man von einer Armee von 35 000 Mann, so will man damit nicht sagen, daß sie genau aus 35 000 Mann besteht, sondern nur, daß sie weniger wie 36 000 und mehr wie 34 000 Mann hat. Der relative Fehler hängt hauptsächlich von der Anzahl der bekannten Ziffern ab. Es sei noch bemerkt, daß man außer in den rein theoretischen Wissenschaften oder solchen von großer Präzision, wie z. B. der Astronomie, gewöhnlich nicht viele Ziffern der Zahlen, mit denen man rechnet, *kennt*; das Wort *kennen* ist in dem oben erwähnten Sinne zu verstehen.

65. In einer Zeichnung z. B., die auf einem Blatt Papier ausgeführt ist, betragen die Längen der einzelnen Linien höchstens einige Dezimeter. Beim Messen wird man eine Präzision, die größer als ein halbes Millimeter ist, kaum erreichen. Die relativen Fehler werden also kaum kleiner als $\frac{1}{1000}$ sein; sicher sind sie größer als $\frac{1}{10000}$. Bei solchen Zahlen wird man kaum mehr als drei Stellen kennen können. Dasselbe gilt, wenn man eine Straße mit der Maßkette mißt, einen Körper mit einer gewöhnlichen Wage wiegt usw. Jeder Physiker weiß, welcher Anstrengung es bedarf, um in einer approximativ bekannten Zahl eine Stelle mehr zu berechnen. Die Astronomen allein gebrauchen Zahlen mit 7 Stellen.**) Der Leser soll sich also bewußt

*) Unter charakteristischen Ziffern versteht man diejenigen Ziffern, mit denen die Zahl geschrieben ist und deren erste die erste von Null verschiedene Ziffer ist; die letzte ist die letzte der von Null verschiedenen Ziffern. Die Zahl 0,030700 hat als charakteristische Ziffern: 3, 0, 7.

**) vgl. Felix Klein: the Evanston Colloquium. Lectures on Mathematics; oder die französische Ausgabe: Conférences sur les Mathématiques, traduites par werden, daß es sinnlos ist, in den Rechnungen eine große Anzahl von Dezimalstellen beizubehalten, sobald die Angaben, wie in obigen Beispielen, so unvollkommen sind. Hier drängt sich unwillkürlich eine Frage auf.

66. Wenn die Zahlen, mit denen man rechnet, nur Näherungswerte sind, wenn man mit diesen Zahlen nur angenäherte Rechnungen ausführt, hat dann das Endresultat überhaupt noch Wert, können die Fehler sich nicht im Laufe der Rechnungen so angehäuft haben, daß man in die Richtigkeit des Resultates gar kein Vertrauen mehr haben kann? Die Antwort auf diese Frage ist folgende: Ändert man bei den Operationen der Arithmetik die Zahlen, mit denen man rechnet, nur sehr wenig, so wird das Endresultat sich nur sehr wenig ändern. Ich werde in Nr. 127 noch darauf zurückkommen.

67. In Nr. 22 hatten wir von Irrationalzahlen gesprochen; es handelte sich darum, das Maß einer Strecke L, die mit der Längeneinheit (dem Idealmeter) inkommensurabel war, auszudrücken. Die Irrationalzahlen können aufgefaßt werden als Dezimalzahlen mit unendlich vielen Stellen, die in einer bestimmten Reihe aufeinanderfolgen. Sie sind analog den Ausdrücken, auf die man stößt, wenn man einen gewöhnlichen Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt, und die Division nicht aufgeht. In dem eben angeführten Beispiel würden sich die einzelnen Stellen der Irrationalzahl folgendermaßen bestimmen lassen.

Nehmen wir z. B. an, die Strecke L bestehe aus 36 Metern und einer Strecke L' kleiner als ein Meter: dann ist 36 der *ganze Teil* der gesuchten Zahl; L' möge bestehen aus 5 Dezimeter und einer Strecke L'' kleiner als ein Dezimeter: dann stellt 5 die Zehntel dar; L'' möge bestehen aus 7 Zentimeter und einer Strecke L''', kleiner als ein Zentimeter: 7 liefert die Hundertstel; besteht L''' aus drei Millimeter und einer Strecke L^{IV}, kleiner als ein Millimeter, so liefert 3 die Tausendstel; setzt sich L^{IV} zusammen aus 6 Zehntel-Millimeter und L^{V} kleiner als ein Zentel-Millimeter, so liefert 6 die Zehntausendstel. *Theoretisch* kann die Operation in gleicher Weise immer weiter fortgeführt werden, und die Zahl schreibt man 36,5736 ....
Die Zahlen

$$36;\quad 36{,}5;\quad 36{,}57;\quad 36{,}573;\quad 36{,}5736;\ \ldots$$
$$37;\quad 36{,}6;\quad 36{,}58;\quad 36{,}574;\quad 36{,}5737;\ \ldots$$

Laugel. (Eine deutsche Übersetzung des Evanston Colloquium ist bisher nicht erschienen.)

stellen die unteren resp. oberen Näherungswerte der gesuchten Zahl auf

$$1;\quad 0{,}1;\quad 0{,}01;\quad 0{,}001;\quad 0{,}0001;\ \ldots$$

genau dar. Die Zahl selbst ist größer als die Zahlen der ersten Reihe und kleiner als die der zweiten. Das Meter und die zu messende Länge können in praxi nicht absolut definiert werden; die oben beschriebenen Operationen können über eine gewisse Grenze hinaus nicht weiter fortgesetzt werden: man muß aufhören, sobald die Längen nicht mehr wahrnehmbar sind. Bloß in theoretischen Untersuchungen kann man das: so hat man z. B. die Zahl

$$\pi = 3{,}141592653589732\ \ldots$$

auf 700 Stellen berechnet. π ist das Verhältnis der Länge eines Kreises und seines Durchmessers.

68. Haben wir umgekehrt ein Symbol mit unendlich vielen Dezimalstellen, so nehmen wir an, daß diesem Symbol eine bestimmte Länge entspricht, und daß dieses Symbol, an beliebiger Stelle abgebrochen, die Länge mit beliebiger Genauigkeit darstellt.

Die folgenden Betrachtungen ermöglichen ein intuitives Erfassen dieses Postulates.

Betrachten wir das Symbol

$$3{,}14159265\ \ldots$$

Die Dezimalstellen mögen sich in bestimmter, ununterbrochener Reihe folgen.

Denken wir uns auf einer Geraden, rechts von einem Punkte 0 aus die Längen, deren Maße die Zahlen

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \ldots$$
$$4;\ 3{,}2;\ 3{,}15;\ 3{,}142;\ 3{,}1416;\ \ldots$$

sind, aufgetragen.

Die Längen, deren Maßzahlen in der ersten Reihe stehen, sind alle kleiner als die Längen, deren Maßzahlen in der zweiten Reihe stehen; die Zahlen der zweiten Reihe wurden gebildet durch Erhöhen der letzten Stelle der resp. Zahlen der ersten Reihe.

Die Endpunkte der Längen der ersten Reihe (die man durch blaue Farbe kennzeichnen möge) befinden sich alle links von den Endpunkten der Längen der zweiten Reihe (die man durch rote Farbe kennzeichnen möge). Denken wir uns die Strecke links von einem beliebigen blauen Punkte blau und die Strecke rechts von einem beliebigen roten Punkte rot gefärbt. Da jeder blaue Punkt links von jedem beliebigen roten Punkte liegt, so wird die blau gefärbte

3*

Strecke nicht in die rot gefärbte hinübergreifen. Nun gibt es aber blaue und rote Punkte, die beliebig nahe aneinander liegen: Die Endpunkte der Längen 3 und 4 sind 1 m voneinander entfernt; die Endpunkte der Längen 3,1 und 3,2 sind 1 dm, diejenigen der Längen 3,14 und 3,15 sind 1 cm voneinander entfernt usw. Es kann also kein weißer Zwischenraum zwischen der roten und der blauen Strecke bleiben: es kann bloß ein *Punkt* sein. Die Entfernung vom Punkte 0 zu diesem Punkte ist die gesuchte Länge. Die Zahlen der ersten Reihe sind zu klein, die der zweiten zu groß. Die Fehler sind kleiner als

$$1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ \ldots$$

69. Der Vollständigkeit halber müßte man noch die Grundoperationen an Irrationalzahlen definieren.*) Allein es genügt, zu wissen, daß diese Operationen stets an Näherungswerten vollzogen werden und daß die Resultate beliebig genau sind: im besondern ist darauf hinzuweisen, daß Gleichheiten, in denen Irrationalzahlen, wie π z. B., vorkommen, im Grunde genommen nicht richtig sind, sobald man π durch einen Näherungswert ersetzt. Aber der Unterschied zwischen den beiden Seiten der Gleichheit wird beliebig klein werden, sobald man die vorkommenden Irrationalzahlen durch genügend genaue Näherungswerte ersetzt.

§ 5. Relative Zahlen. Grundoperationen an diesen Zahlen.

70. Der Leser möge sich eine gerade Landstraße vorstellen, die mit Kilometersteinen besetzt ist und sich beispielsweise von Süden nach Norden erstreckt. Einer von diesen Marksteinen, den wir als Ausgangspunkt wählen, ist durch 0 bezeichnet; der erste Stein, dem man begegnet, wenn man in nördlicher Richtung geht, ist 1_n, der zweite 2_n, der dritte $3_n \ldots$ gezeichnet; desgleichen, wenn man vom Markstein 0 aus in südlicher Richtung geht, sind die aufeinanderfolgenden Steine sukzessiv 1_s, 2_s, $3_s \ldots$ gezeichnet. So oft ein Fußgänger, der diese Konventionen kennt, vor einem dieser Kilometer-

*) Der Begriff des Messens diente dazu, die Operationen an Brüchen zu definieren; sind zwei Irrationalzahlen a, b die Maßzahlen zweier Längen A und B, so wird die Summe oder der Unterschied dieser zwei Zahlen die Maßzahl der Summe oder des Unterschiedes der zwei Längen A, B sein. Was das Produkt und die Division anbelangt, so könnten die in den Nummern 34 und 41 abgeleiteten Sätze als Definitionen dieser Operationen angesehen werden; wie man aber auch verfahren möge, eines ist unerläßlich für die Strenge der Beweisführung: zu zeigen, daß die Eigenschaften der Operationen an ganzen Zahlen und Brüchen gültig bleiben für Irrationalzahlen.

steine steht, weiß er genau, an welchem Punkt der Straße er sich befindet. Benutzt er die Straße oft und ist er mit ihr vertraut geworden, so ruft der Gedanke an die Nummer irgendeines beliebigen Steines mit dem begleitenden Zeichen *n* oder *s* gleich in ihm den Gedanken an einen bestimmten Punkt der Straße und der umliegenden Landschaft hervor, an die Aussicht, die man von diesem Punkte aus hat, an die Häuser und die Bäume, die in der Nähe sind; es besteht eine *Übereinstimmung* zwischen den Zahlen, die auf den Marksteinen verzeichnet sind, und den Punkten, welche diese Steine bezeichnen; diese Übereinstimmung besteht zwar nur für die erwähnten Punkte; aber anstatt daß wir annehmen, es komme ein Grenzstein auf jedes Kilometer, kann man auch annehmen, es komme einer auf jedes Hektometer, jede 10 m, jedes Meter; bei jedem Schritte würde dann der Fußgänger auf eine Nummer mit dem Zeichen *n* oder *s* stoßen, die ihm genau angeben würde, an welchem Punkte er sich befindet. Man begreift, daß jedem einzelnen Punkte der Straße eine Zahl mit dem Zeichen *n* oder *s* und umgekehrt, daß jeder einzelnen Zahl mit einem solchen Zeichen ein Punkt der Straße entsprechen kann. Dies wird etwas später genau auseinandergesetzt werden; für den Augenblick genüge es, die Kilometersteine zu betrachten.

71. Vor einem solchem Marksteine weiß der Fußgänger nicht nur, wie weit er von dem Ausgangspunkt entfernt ist und in welcher Richtung er gehen muß, um sich ihm wieder zu nähern, sondern im Falle, wo er sich nach einem andern Markstein begeben will, dessen Nummer und Zeichen er kennt, wird es auch ein Leichtes für ihn sein, die Entfernung bis dahin auszurechnen und die Richtung zu bestimmen, in der er gehen muß. Diese Berechnungen sind so einfach, daß es nicht nötig ist, sich dabei aufzuhalten.

72. An Stelle der Zeichen *n*, *s*, die, wie ich oben angenommen habe, rechts unter die Nummer zu stehen kommen, kann man natürlich irgendwelche beliebige andere Zeichen einführen unter der Bedingung, daß man die Konventionen genau festsetze. So kann man sie zum Beispiel durch die Zeichen + und —, die *plus* und *minus* lauten und vor der Nummer stehen, ersetzen; diese Zeichen werden zwar in der Arithmetik in einer Bedeutung gebraucht, die dem Leser geläufig ist, die er aber einstweilen vergessen möge; man könnte auch übereinkommen, die Nummern der Marksteine, die man, vom Ausgangspunkt ausgehend, in nördlicher Richtung antrifft, unbezeichnet zu lassen, dagegen das Zeichen — vor die Nummern der Marksteine südlich vom Ausgangspunkt zu setzen; obwohl wir schließlich bei einer derartigen Konvention stehen bleiben (Nr. 105), behalte ich einstweilen den Gebrauch der Zeichen*) + und — bei.

73. Das Symbol, das durch eine gewöhnliche Zahl mit vorhergehendem + oder — Zeichen gebildet wird, nennt man eine *relative* Zahl; steht das + Zeichen, ist es eine *positive*, steht das — Zeichen, ist es eine *negative* Zahl; die Zahlen der Arithmetik heißen *absolute* Zahlen; die absolute Zahl, die in einer relativen Zahl figuriert, ist der *absolute Wert* dieser relativen Zahl: + 5 ist eine positive Zahl, — 5 eine negative; der absolute Wert dieser beiden Zahlen ist 5.

Um eine relative Zahl zu definieren, muß man ihren absoluten Wert und ihr Vorzeichen angeben. Ausgenommen jedoch ist die Zahl 0, die man unter die relativen Zahlen rechnet, der man aber entweder keine Vorzeichen oder nach Belieben das Zeichen + oder das Zeichen — voranstellen kann. 0, + 0, — 0 ist genau dasselbe.

Zwei relative Zahlen sind einander gleich, wenn sie denselben absoluten Wert und dasselbe Vorzeichen haben oder wenn beide Null sind.

Zwei relative Zahlen sind *symmetrisch***), wenn sie denselben absoluten Wert, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben, oder aber wenn beide Null sind. Die symmetrische Zahl der symmetrischen Zahl einer gegebenen Zahl ist natürlich keine andere als diese Zahl selbst.

In diesem Paragraphen werde ich die Zeichen + und — nie in der Bedeutung von *Operation* gebrauchen, die sie in der Arithmetik haben. Diese Zeichen müssen als zu den (absoluten) Zahlen, denen sie vorhergehen, gehörend angesehen werden: beide zusammengenommen, die (absolute) Zahl und das Vorzeichen, bilden die *relative Zahl.*

Zur Erleichterung der Ausdrucksweise werde ich in diesem Paragraphen die relativen Zahlen immer durch griechische Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ oder durch Symbole, die in Nr. 83 definiert werden, bezeichnen. Ein solcher Buchstabe oder ein solches Symbol kann auch die Zahl 0 darstellen, nie aber eine andere absolute Zahl außer 0.

74. Der Gebrauch dieser Symbole, die aus einer absoluten Zahl und dem + oder — Zeichen zusammengesetzt sind, zur Bezeichnung der Temperaturverhältnisse, ist dem Leser geläufig: er weiß, was er unter einer Temperatur von $+ 15^0$ oder von $- 7^0$ zu verstehen hat; dieser Zahlen rufen in ihm die Erinnerung an gewisse Empfindungen

*) Es ist leicht einzusehen, daß die Wahl dieser Zeichen für die weiteren Erörterungen bis zu Nr. 104 nicht wesentlich ist.

**) Anstatt symmetrisch sagt man öfters gleich und mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen.

wach; umgekehrt entspricht auch jeder Temperatur über oder unter 0 eine positive oder negative Zahl. Gibt man dem Leser zwei solche Zahlen an, die zwei Temperaturen entsprechen, so weiß er, ob das Thermometer steigen oder fallen muß, um von der einen auf die andere zu kommen; er kann auch ausrechnen, um wieviel Grad das Thermometer steigen oder fallen muß. Er sieht übrigens ein, wie sehr sich diese beiden Beispiele gleichen.

75. Um dem ersten Beispiele eine wissenschaftlichere Form zu geben, wollen wir uns an Stelle einer von Süden nach Norden führenden Straße eine unbegrenzte gerade Linie vorstellen; nehmen wir an, man habe eine Längeneinheit gewählt, z. B. das Zentimeter, dann auf

Fig. 9.

der geraden Linie einen Punkt 0, Nullpunkt genannt, der die Rolle des mit 0 bezeichneten Marksteines spielt, und endlich eine *Richtung*, die man die positive Richtung nennt, z. B. die Richtung von links nach rechts, durch den Pfeil angedeutet. Dies angenommen kann man sagen, daß jedem Punkt der geraden Linie eine relative Zahl entspricht, die man dessen *Abszisse* nennt.

Der absolute Wert der Abszisse eines beliebigen Punktes der geraden Linie ist die Zahl (ganze Zahl, Bruchzahl oder Irrationalzahl), welche die Entfernung zwischen dem Nullpunkt und diesem Punkt mißt; das Vorzeichen der Abszisse ist + oder −, je nachdem man, um vom Nullpunkt nach diesem Punkte zu gehen, in positiver oder entgegengesetzter (negativer) Richtung gehen muß.

In dem vorhergehenden Beispiel haben die zur Rechten des Nullpunktes gelegenen Punkte eine positive, die zur Linken gelegenen Punkte eine negative Abszisse. Die Abszisse des Nullpunktes 0 ist die Zahl 0 oder $+0$, -0 (Nr. 73), wie man will.

Umgekehrt entspricht jeder relativen Zahl ein bestimmter Punkt der geraden Linie; so zum Beispiel würde der Zahl $+5$ der Punkt A entsprechen, den man erhält, indem man 5 cm vom Nullpunkt aus nach rechts hin zählt. Der Zahl $-\frac{13}{4}$ würde der Punkt B entsprechen, den man erhält, indem man dreizehn Viertel eines Zentimeters vom Nullpunkt 0 an auf die gerade Linie in der Richtung nach links aufträgt.

76. Zu bemerken ist, daß, wenn man die Abszissen zweier Punkte, z. B. A und B, kennt, es leicht ist, zu wissen, in welcher Richtung man gehen muß, um von dem einen zu dem andern zu gelangen, und wieviel Zentimeter die Entfernung von dem einen zum andern beträgt: im vorhergehenden Beispiel muß man, um von A nach B zu kommen, in negativer Richtung gehen, und die Entfernung zwischen den beiden Punkten, mit dem Zentimeter als Einheit berechnet, oder, wie man sich kürzer ausdrückt, nach Zentimetern berechnet, ist die Summe der beiden Zahlen 5 und $\frac{13}{4}$, also $\frac{33}{4} = 8{,}25$.

77. Man kann ähnliche Konventionen gebrauchen, um den *Zeitpunkt* einer Begebenheit in der Dauer zu fixieren. Man nimmt zuerst eine Zeiteinheit, z. B. die Minute, dann einen Ausgangszeitpunkt, z. B. die Mittagszeit eines bestimmten Tages. Der Zeitpunkt einer Begebenheit wird dann die Zahl Minuten sein, die zwischen dieser Begebenheit und dem Ausgangszeitpunkt verflossen sind, mit vorhergehendem $+$ oder $-$ Zeichen, je nachdem die Begebenheit nach oder vor den Ausgangszeitpunkt fällt.

Auch hier entspricht jeder Begebenheit eine bestimmte relative Zahl, jeder relativen Zahl ein Zeitpunkt der Dauer. Kennt man die Zeitpunkte der beiden Begebenheiten, so weiß man auch hier, welche von beiden die frühere ist, und wieviel Minuten zwischen den beiden Begebenheiten verflossen sind.

78. Übrigens ist dieses Beispiel eigentlich nicht von dem vorhergehenden verschieden, sondern es läßt sich darauf zurückführen: es genügt, sich an Stelle der gewöhnlichen Uhren eine solche vorzustellen, die durch eine unbegrenzte gerade Linie gebildet wird; auf dieser Linie bewege sich gleichmäßig mit einer Geschwindigkeit von einem Zentimeter per Minute ein Körper, der das äußere Ende des auf dem Zifferblatt sich bewegenden Zeigers ersetzt: angenommen, im Ausgangszeitpunkt passiere dieser Körper den Abszissen-Nullpunkt, so ist die relative Zahl, die jeden Augenblick bestimmt, die Abszisse des beweglichen Körpers in diesem Augenblick.

79. Stellen wir uns weiter einen Bankier vor, der einzieht und auszahlt: der größeren Einfachheit halber nehme ich an, es sei immer eine genaue Anzahl Franken, die er einziehe oder auszahle. Anstatt „einziehen und auszahlen“ zu sagen, kommen wir überein, immer „einziehen“ zu sagen, und diejenigen Franken, die er wirklich einzieht, positive, diejenigen hingegen, die er wirklich auszahlt, negative Franken zu nennen. Jede eingezogene Summe, in der erweiterten Bedeutung des Wortes, kann so durch eine positive oder negative (ganze) Zahl näher bestimmt werden.

Diese verschiedenen Beispiele veranschaulichen schon die Nützlichkeit der relativen Zahlen; diese wird uns noch klarer vor Augen geführt, wenn wir damit rechnen lernen; dazu ist es notwendig, zuerst eine jede der an den relativen Zahlen ausführbaren Operationen zu definieren.

80. Die Summe zweier relativer Zahlen ist eine Zahl, die man durch folgende, zugleich als Definition der Addition geltende Regeln erhalten kann: wenn die beiden relativen Zahlen dasselbe Vorzeichen haben, so erhält man den absoluten Wert ihrer Summe, indem man die absoluten Werte dieser beiden Zahlen addiert und ihr gemeinschaftliches Vorzeichen vor die Summe setzt. Haben die beiden relativen Zahlen entgegengesetzte Vorzeichen und absolute Werte, die voneinander verschieden sind, so ist der absolute Wert ihrer Summe gleich dem Unterschied zwischen den absoluten Werten der beiden relativen Zahlen, während sie als Vorzeichen das Vorzeichen derjenigen der beiden relativen Zahlen erhält, die den größten absoluten Wert hat.

Sind die beiden relativen Zahlen *symmetrisch* (Nr. 73), und im speziellen, sind sie beide 0, so ist ihre Summe 0. Aus dem, was vorhergeht, folgt, daß die Summe zweier relativer Zahlen nur 0 sein kann, wenn sie symmetrisch sind.

Man ändert eine relative Zahl nicht, wenn man ihr 0 hinzufügt.

So z. B. ist die Summe von $+5$ und von $+\frac{1}{2}$ gleich $+\frac{11}{2}$; diejenige von -5 und $-\frac{1}{2}$ gleich $-\frac{11}{2}$; diejenige von $+5$ und $-\frac{1}{2}$ gleich $+\frac{9}{2}$; diejenige von -5 und $+\frac{1}{2}$ gleich $-\frac{9}{2}$; diejenige von $+5$ und -5 gleich 0; diejenige von $+5$ (oder -5) und 0 gleich $+5$ (oder -5).

Nach den vorhergehenden Definitionen ist die Summe zweier relativer Zahlen unabhängig von der Reihenfolge, in der sie aufgeführt werden (ob die einzelne an erster oder an zweiter Stelle stehe): denn diese Reihenfolge spielt keine Rolle in den Definitionen.

81. Hat man nun mehrere relative Zahlen, die in einer bestimmten Reihenfolge angegeben sind, zu addieren, so addiert man die beiden ersten, fügt dieser Summe die dritte Zahl hinzu, usw.

Kehren wir zum Beispiel des Bankiers (Nr. 79) mit seinen positiven und negativen Einnahmen zurück, so sehen wir gleich, daß die Summe zweier Einnahmen gerade die (positive oder negative) Einnahme ergibt, die aus diesen zwei Operationen resultiert. Daraus kann der Leser jetzt schon den Schluß ziehen, daß die algebraischen Summen dieselben Grundeigenschaften wie die arithmetischen Summen besitzen, d. h. daß man, ohne die Summe zu ändern, die Reihenfolge ihrer Glieder ändern und irgendwelche beliebige Glieder durch deren fertige Summe ersetzen kann; denn es ist ziemlich klar, daß das Resultat der durch den Bankier ausgeführten Operationen unabhängig ist von der Reihenfolge, in der diese Operationen stattgefunden haben: übrigens bietet der arithmetische Beweis dieses fundamentalen Satzes keine Schwierigkeiten, und ich werde gleich einen anderen, geometrischen, erbringen. Zu dem Zwecke ist es angebracht, die Erörterungen aus Nr. 75 etwas zu verallgemeinern.

82. Man bezeichnet mit dem Namen *Vektor* eine begrenzte, gerade Linie, in der man die beiden Punkte A, B unterscheidet, durch die sie begrenzt wird, die nicht dieselbe Rolle spielen, und die man als *Ausgangspunkt* resp. *Endpunkt* des Vektors bezeichnet. Man stellt einen Vektor als Figur durch die beiden Buchstaben AB dar, welche dessen Ausgangs- und dessen Endpunkt bezeichnen, und zwar so, daß der Buchstabe, der dem Ausgangspunkt entspricht, an erste Stelle gesetzt wird. So bezeichnen also die beiden Ausdrucksweisen AB, BA nicht denselben Vektor. Man stelle sich einen Pfeil im Raume vor, und *kehre ihn* dann *um*; so ist es klar, daß er eine verschiedene Position einnimmt. Fällt der Ausgangspunkt mit dem Endpunkt zusammen, so sagt man, der Vektor, der eigentlich nicht existiert, sei Null. Ein Vektor, der nicht Null ist, hat eine *Richtung*: nämlich die Richtung eines Körpers, der sich vom Ausgangspunkte zum Endpunkte des Vektors hin bewegen würde. Ich werde besonders solche Vektoren betrachten, die auf einer und derselben geraden Linie liegen; ich muß jedoch im allgemeinen bemerken, daß man zwei Vektoren, die einander gleich sind, auf zwei Parallellinien oder auf derselben geraden Linie liegen und dieselbe Richtung haben, als *gleichwertig* bezeichnet; zwei Vektoren, die mit einem dritten gleichwertig sind, sind es auch miteinander.

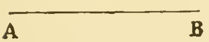


Fig. 10.

83. Nehmen wir eine unbegrenzte gerade Linie, auf welcher man eine Längeneinheit und eine positive Richtung gewählt hat, z. B. die Richtung von links nach rechts; es ist nicht notwendig, wie in Nr. 75, einen Nullpunkt festzusetzen. Diese Richtung und diese Längeneinheit können miteinander durch einen auf der geraden Linie liegenden *Vektor UV als Einheit* dargestellt werden, d. h. einen Vektor,

Fig. 11.

welcher der gewählten Längeneinheit gleich ist, und dessen Richtung der auf der Linie als positiv bezeichneten entspricht. Eine solche gerade Linie, auf der man eine Längeneinheit und eine positive Richtung angenommen hat, nennt man oft *Achse.*

Dies vorausgesetzt, nehmen wir einen beliebigen, auf der Achse gelegenen Vektor AB; ich bezeichne durch das Symbol $\overline{AB}$*) die *relative Zahl,* deren absoluter Wert das Maß der Länge des Vektors AB (das Verhältnis der beiden Längen AB, UV) ausdrückt, und deren Vorzeichen $+$ oder $-$ ist, je nachdem die Richtung des Vektors die positive ist oder nicht (je nachdem die beiden Vektoren AB, UV dieselbe Richtung haben oder nicht). Die Zahl $\overline{AB}$ nennt man das algebraische Äquivalent des Vektors AB. Daraus geht klar hervor, daß zwei auf der Achse liegende gleichwertige Vektoren dasselbe algebraische Äquivalent besitzen, und umgekehrt, daß, eine beliebige relative Zahl vorausgesetzt, es eine unendliche Anzahl gleichwertiger Vektoren auf der geraden Linie gibt, die diese Zahl als algebraisches Äquivalent zulassen. Ein Vektor ist ganz genau auf der Achse bestimmt, wenn man dessen Ausgangspunkt und algebraisches Äquivalent angibt. Es genügt, von diesem Ausgangspunkt aus und in positiver oder entgegengesetzter Richtung, je nachdem die gegebene relative Zahl positiv oder negativ ist, eine Länge auf die Achse aufzutragen, deren Maß der absolute Wert dieser relativen Zahl ausdrückt; der Endpunkt dieser Länge ist auch der Endpunkt des zu suchenden Vektors. Ein Vektor, der Null ist, hat 0 zum algebraischen Äquivalent. Endlich ist es auch klar, daß die beiden Zahlen $\overline{AB}$, $\overline{BA}$ symmetrisch**) sind.

*) Man setzt einen Strich über AB, um einer möglichen Verwechslung vorzubeugen: AB stellt eine geometrische Figur, einen Vektor, $\overline{AB}$ aber eine Zahl dar. Ist eine Verwechslung nicht zu befürchten, kann man den Strich weglassen.

**) Was ich oben als *Vektor* definiert habe, nennt man sehr oft *Strecke einer Geraden* oder einfachhin *Strecke*; man gebraucht dieses selbe Wort auch, um das algebraische Äquivalent zu bezeichnen Es erscheint mir als wünschenswert, das Wort *Vektor* überall anzunehmen, da es ja ziemlich allgemein angewandt wird und außerdem die Idee einer Richtung impliziert. Das ist nicht der Fall für das Wort *Strecke*; ich wende dieses letztere Wort in der Bedeutung *„begrenzte gerade Linie“* an, indem ich von jeglicher Idee einer

84. Das Wort „symmetrisch“ hat in der Geometrie eine Bedeutung, die der algebraischen vollkommen entspricht.

Beschränken wir uns auf Punkte der Achse, so kann man sagen, daß zwei Punkte A, A' zu einem Punkt M symmetrisch liegen, wenn dieser Punkt M ihre Mitte ist; daß zwei Vektoren AB, $A'B'$ in Beziehung auf den Punkt M symmetrisch sind, wenn ihre Ausgangspunkte zu diesem Punkte symmetrisch liegen, und ebenso ihre Endpunkte. Es genügt, sich nebenstehende Figuren anzusehen, um zu erkennen, einerseits, daß, wenn man den Punkt M als Nullpunkt annimmt, die Abszissen zweier zu diesem Punkt M symmetrisch liegender Punkte symmetrische Zahlen sind; andrerseits, daß die algebraischen Äquivalente $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ zweier Vektoren AB, $A'B'$, die zu einem beliebigen Punkt symmetrisch sind, symmetrische Zahlen sind; und umgekehrt, sind die algebraischen Äquivalente zweier Vektoren symmetrisch, so kann man behaupten, daß diese beiden Vektoren in Beziehung auf den Punkt, der die Mitte ihrer Ausgangspunkte bildet, symmetrisch sind. So zum Beispiel sind die beiden Vektoren AB, BA, deren algebraischen Äquivalente $\overline{AB}$, $\overline{BA}$ symmetrische Zahlen sind, in Beziehung auf die Mitte der Punkte A, B, symmetrisch.

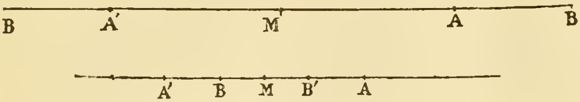


Fig. 12.

85. Dies vorausgesetzt, nehmen wir an, man habe zwei relative Zahlen zu addieren; so konstruiert man einen der ersten Zahl entsprechenden Vektor AB, dessen algebraisches Äquivalent dieser Zahl genau gleich ist; der Ausgangspunkt A dieses Vektors kann willkürlich gewählt werden; den Endpunkt desselben Vektors nimmt man dann als Ausgangspunkt eines zweiten Vektors BC, dessen algebra-

Fig. 13.

Richtung oder eines Unterschiedes zwischen Ausgangs- und Endpunkt abstrahiere. Die Strecke AB ist also genau dasselbe wie die Strecke BA; aber der Vektor AB ist von dem Vektor BA verschieden.

Bemerken wir noch dazu, daß das Symbol AB verschiedene Bedeutungen haben kann: sagt man Vektor AB oder Strecke AB oder gerade Linie AB (für die unbegrenzte gerade Linie, die durch die Punkte A, B geht), so ist die Bedeutung dieser Ausdrücke klar; es handelt sich um eine Figur. Gebrauche ich aber den Ausdruck „Zahl AB“, oder wende ich dieses Symbol in einer Rechnung an, verstehe ich darunter immer die absolute Zahl, welche die Entfernung zwischen den beiden Punkten A, B mißt. Das Symbol $\overline{AB}$ endlich wird, wie wir gesehen haben, immer in der Bedeutung einer relativen Zahl angewandt.

isches Äquivalent die zweite Zahl bilden soll, so daß die beiden gegebenen Zahlen oben mit den Zahlen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ identisch sind: es genügt, auf die Definitionen zurückzugehen und die verschiedenen möglichen Fälle zu untersuchen, um festzustellen, daß in allen Fällen die Summe dieser beiden Zahlen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ das algebraische Äquivalent $\overline{AC}$ des Vektors AC ist: um dies zu konstatieren, braucht man nur die so einfachen, in Nr. 71 u. 76 berührten Probleme zu lösen. Dieses Hauptresultat bleibt dasselbe, wenn die eine oder die andere der zu addierenden Zahlen Null ist; es bleibt auch dasselbe, wenn sie symmetrisch sind; denn, wenn der Vektor AB der ersten Zahl entspricht, so entspricht BA der zweiten; die Summe der beiden symmetrischen Zahlen $\overline{AB}$, $\overline{BA}$ ist Null, gerade wie der Vektor AA.

Den vorhergehenden Satz kann man nun auch folgendermaßen formulieren: wenn A, B, C drei Punkte sind, die sich irgendwo auf einer Achse befinden, so stellt die Zahl $\overline{AC}$ immer die Summe der Zahlen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ dar.

86. Betrachtet man einen vierten Punkt D, der sich irgendwo auf der Achse befindet, so ist es klar, daß die Summe der drei relativen Zahlen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ gleich $\overline{AD}$ ist. Denn addiert man die beiden ersten Zahlen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, so erhält man $\overline{AC}$, und addiert man $\overline{CD}$ und $\overline{AC}$, so erhält man infolge desselben Satzes $\overline{AD}$. Würde man einen fünften Punkt E betrachten, so würde man natürlich ebenso finden, daß die Summe der relativen Zahlen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ gleich $\overline{AE}$ wäre, usw.

87. In einer Summe von relativen Zahlen, die in einer bestimmten Reihenfolge stehen, und nach den Erklärungen in Nr. 81 ausgerechnet ist, kann man zwei oder mehrere konsekutive Glieder durch ihre fertige Summe ersetzen. Denn nehmen wir an, die Zahlen, die man addieren will, werden durch die Vektoren AB, BC, CD, DE geometrisch dargestellt: so wird die Summe der vier Zahlen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ gleich $\overline{AE}$ sein; sie wird dieselbe bleiben, wenn man die beiden Zahlen $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ zum Beispiel durch ihre fertige Summe $\overline{BD}$ ersetzt, da ja die Summe der drei Zahlen $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$ gleich $\overline{AE}$ ist. Im speziellen, anstatt einer relativen Zahl nacheinander zwei relative Zahlen hinzuzufügen, kann man derselben ihre fertige Summe hinzufügen. Da man in einer algebraischen Summe zwei konsekutive Glieder durch deren fertige Summe ersetzen kann, und diese Summe von der Reihenfolge der beiden Glieder unabhängig ist, so ist es klar, daß man in einer algebraischen Summe die Reihenfolge zweier konsekutiver Glieder umkehren kann, ohne die Summe selbst zu ändern; man kann so ein beliebiges Glied an eine beliebige Stelle setzen; man kann auch beliebige Glieder zusammenbringen und so konsekutiv machen. Man sieht also wohl, daß man in einer algebraischen Summe die Reihenfolge der Glieder ändern und beliebige Glieder durch ihre fertige Summe ersetzen kann; im speziellen kann man Glieder, deren Summe Null ist, zum Beispiel zwei symmetrische Glieder, einfach weglassen.

88. Wenn man in einer algebraischen Summe alle Glieder durch ihre symmetrischen Werte ersetzt, so ist die neue Summe die symmetrische Zahl der ersten. Denn stellt man die Glieder der ersten Summe durch konsekutive Vektoren AB, BC, CD, dar, so daß $\overline{AD}$ die Summe der gegebenen Zahlen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ darstellt, und nimmt

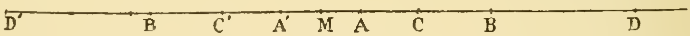


Fig 14.

man vier Punkte A', B', C', D', die mit den Punkten A, B, C, D in Beziehung auf einen beliebigen Punkt M der Achse symmetrisch sind, so sind die Zahlen $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ mit den Zahlen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ symmetrisch, und die Summe $\overline{A'D'}$ der ersten ist die symmetrische Zahl der Summe $\overline{AD}$ der zweiten. Übrigens ist dieser Satz in der Definition einer Summe enthalten für den Fall, wo diese Summe nur zwei Glieder enthält, und erstreckt sich dann auf den Fall, wo man drei, vier . . . Glieder hat.

89. Die Subtraktion der relativen Zahlen kann man als umgekehrte Addition definieren: Angenommen, man habe zwei relative Zahlen α, β, so hat die Subtraktion zum Zwecke, eine relative Zahl γ zu finden, die man zu β hinzufügen muß, um die Zahl α wieder zu erhalten.

Bezeichnen wir durch OA einen Vektor, dessen algebraisches Äquivalent $\overline{OA}$ gleich α ist, und durch OC den Vektor, der denselben Ausgangspunkt O hat, und dessen algebraisches Äquivalent $\overline{OC}$ die gewünschte Zahl γ ist. Zu suchen ist, welcher notwendigen und hinreichenden Bedingung der Punkt C genügen muß, damit die Summe der zwei Zahlen $\overline{OC}$ und β gleich α oder $\overline{OA}$ sei; sehen wir den Punkt C als Ausgangspunkt eines Vektors $\overline{CA'}$ an, dessen algebraisches Äquivalent $\overline{CA'}$ gleich β ist; damit die Summe OA' der Zahlen $\overline{OC}$ und $\overline{CA'}$ gleich $\overline{OA}$ ist, ist es notwendig und hinreichend, daß der Punkt A' mit dem Punkt A zusammenfalle; wenn dem so ist, so ist, immer infolge desselben Lehrsatzes, die Zahl $\overline{OC}$ die Summe der Zahlen $\overline{OA}$ oder α und $\overline{AC}$; diese letzte Zahl ist symmetrisch mit $\overline{CA}$ oder β. Daraus schließen wir folgendes:

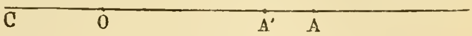


Fig. 15.

Man erhält die Differenz zweier relativer Zahlen α, β, indem man der ersten die symmetrische Zahl der zweiten hinzufügt.

Hier dieselbe Beweisführung in abstrakter Form: nehmen wir an, β' sei die symmetrische Zahl von β; die Summe der Zahlen γ, β muß gleich α sein; also muß die Summe der drei Zahlen γ, β, β', das heißt γ (Nr. 87), gleich sein der Summe der beiden Zahlen α, β'. Umgekehrt wird diese letzte Summe α, wenn man ihr β hinzufügt: sie ist also die gesuchte Differenz.

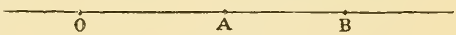


Fig. 16.

So zum Beispiel ist der Unterschied von $+5$ und -7 die Summe von $+5$ und $+7$, das heißt $+12$; der Unterschied von -5 und -7 ist die Summe von -5 und $+7$, also $+2$.

Stellt man die beiden Zahlen α, β durch zwei Vektoren OA, OB mit demselben Ausgangspunkt O dar, so sieht man gleich, daß die Zahl $\overline{BA}$ die gesuchte Differenz darstellt, da die Summe der Zahlen $\overline{OB}$, $\overline{BA}$ gleich $\overline{OA}$ ist.

90. Hat man relative Zahlen, die den Punkten einer Achse, auf der man einen festen Ausgangspunkt O gewählt hat, entsprechen, so ist das nur ein besonderer Fall der Darstellung von Zahlen durch Vektoren. Was man in Nr. 75 *Abszisse* eines Punktes A genannt hat, ist nichts weiter als das algebraische Äquivalent des Vektors OA, dessen Ausgangspunkt der Punkt O und dessen Endpunkt der Punkt A ist. Betrachtet man zwei Punkte A, B der Achse, einerlei wo sie sich befinden, so ist das algebraische Äquivalent des Vektors AB (die Zahl $\overline{AB}$) nach dem, was wir oben gesagt haben, der Unterschied zwischen der Abszisse des Endpunktes B und der Abszisse des Ausgangspunktes A des Vektors AB.

91. Ähnliche Erwägungen lassen sich auf die Zeit anwenden; übrigens geht diese Analogie direkt aus Nr. 78 hervor, wo man eine Art geradlinige Uhr angenommen hat. Nennt man Zwischenzeit zwischen zwei Begebenheiten A, B eine relative Zahl, deren absoluter Wert die Zahl der Zeiteinheiten, z. B. der Sekunden darstellt, die zwischen den beiden Begebenheiten verflossen sind und deren Vorzeichen + und — ist, je nachdem die Begebenheit A früher oder später fällt als die Begebenheit B, so hat man folgende Sätze:

Nimmt man drei beliebige Begebenheiten A, B, C, so ist die Zwischenzeit zwischen den Begebenheiten A, C die Summe der Zwischenzeit zwischen den Begebenheiten A, B und der Zwischenzeit zwischen den Begebenheiten B, C.

Die Zwischenzeit zwischen den Begebenheiten A, B ist der Unterschied zwischen dem *Zeitpunkt* der Begebenheit B (Nr. 77) und dem Zeitpunkt der Begebenheit A.

92. Kehren wir wieder zu dem Fall zurück, wo die relativen Zahlen den Punkten einer Achse entsprechen, auf der man einen festen Ausgangspunkt gewählt hat, und auf der die positive Richtung, wie die Figur zeigt, dieRichtung von links nach rechts ist.

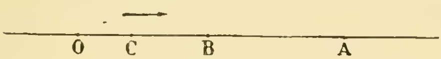


Fig. 17.

Man sagt allgemein, daß die Abszisse eines Punktes, der sich in positiver Richtung bewegt, immer zunimmt: so wird in obenstehender Figur die Abszisse des Punktes A als größer angesehen als die Abszisse des Punktes B, weil der Punkt A sich rechts vom Punkt B befindet; ist dies der Fall, so hat der Vektor BA, dessen numerisches Äquivalent $\overline{BA}$ die Differenz zwischen der Abszisse des Punktes A und der Abszisse des Punktes B ist, die positive Richtung, und die Zahl $\overline{BA}$ ist positiv.

Man sagt, die relative Zahl α sei größer oder kleiner als die relative Zahl β, je nachdem die Differenz zwischen α und β positiv oder negativ ist.

Es ist klar, daß, wenn der Punkt B sich rechts vom Punkt C, und der Punkt A sich rechts vom Punkt B befindet, der Punkt A dann rechts vom Punkt C ist. Ist α größer als β und β größer als γ, so ist α größer als γ.

Jede positive Zahl ist größer als 0 und als jede beliebige negative Zahl.

93. Fügt man einer und derselben Zahl zwei verschiedene Zahlen hinzu, so erhält man zwei verschiedene Zahlen; die größere Summe entspricht der größeren addierten Zahl. Zieht man von einer und derselben Zahl zwei verschiedene Zahlen ab, so erhält man zwei verschiedene Zahlen; die größere Differenz entspricht der kleinern subtrahierten Zahl.

94. Das Produkt zweier relativer Zahlen ist eine relative Zahl, deren absoluter Wert das Produkt der absoluten Werte der beiden gegebenen Zahlen ist, und deren Vorzeichen + oder — ist, je nachdem die beiden Zahlen gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Betrachtet man nun mehrere relative Zahlen, die in einer bestimmten Reihenfolge geordnet sind, so erhält man deren Produkt, indem man das Produkt der beiden ersten bildet, das so erhaltene Teilprodukt mit der dritten multipliziert, usw. Daraus geht hervor, daß der absolute Wert des Produktes gleich ist dem Produkt der absoluten Werte der *Faktoren*, und daß das Resultat positiv ist, wenn die Zahl der negativen Faktoren gerade ist oder kein negativer Faktor dabei ist, daß es aber negativ ist, wenn die Zahl der negativen Faktoren ungerade ist. Dieses Produkt ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren, da dessen absoluter Wert unabhängig davon ist (Nr. 9, 36), desgleichen das Vorzeichen nach dem, was eben gesagt worden ist. Ändert man das Vorzeichen eines der Faktoren eines Produkts, ohne dessen absoluten Wert zu ändern, so erhält das Produkt ein anderes Vorzeichen, ohne den absoluten Wert zu ändern. Ist einer der Faktoren Null, so ist das Produkt der Definition gemäß Null. In einem Produkt von relativen Faktoren kann man beliebige Faktoren durch deren fertiges Produkt ersetzen. Im speziellen kann man, anstatt eine relative Zahl nacheinander mit zwei relativen Zahlen zu multiplizieren, sie mit deren Produkt multiplizieren.

Beiläufig sei bemerkt, daß, gemäß der Definition eines Produkts zweier relativer Zahlen α, β, dieses Produkt dasselbe Vorzeichen wie α hat, wenn β positiv ist, dagegen das entgegengesetzte Vorzeichen wie α, wenn β negativ ist.

95. Es sei auch noch bemerkt, daß das Produkt einer Zahl mit $+1$ immer dieser Zahl gleich ist. Wenn der Faktor $+1$ in einem Produkt figuriert, so kann man ihn streichen (wie das Glied 0 in einer Summe). Desgleichen kann man in einem Produkt mehrere Faktoren, deren Produkt gleich $+1$ ist, streichen. Man bezeichnet als umgekehrte Werte zwei relative Zahlen α, α', deren Produkt gleich $+1$ ist. Es ist klar, daß zwei solche Zahlen das gleiche Vorzeichen haben müssen, und daß das Produkt ihrer absoluten Werte gleich 1 sein muß. Umgekehrt entspricht jeder relativen Zahl α, *die nicht Null ist*, eine andere relative Zahl α', die deren umgekehrter Wert ist: α ist auch der umgekehrte Wert von α'. Wenn in einem Produkt zwei umgekehrte Faktoren figurieren, so kann man sie streichen.

96. Das Produkt der Summe zweier relativer Zahlen α, β mit einer relativen Zahl γ ist gleich der Summe der Produkte der beiden Zahlen α, β mit der Zahl γ.

Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise wollen wir das Produkt zweier relativer Zahlen durch einfaches Nebeneinandersetzen der zwei griechischen Buchstaben, die für sie stehen, bezeichnen.

Daß das Produkt der Summe der beiden Zahlen α, β mit γ an absolutem Wert der Summe der Produkte $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ gleich ist, geht direkt aus den in Nr. 7, 8 und 36 aufgestellten Sätzen hervor: um die Summe oder die Differenz zweier absoluter Zahlen mit einer dritten Zahl zu multiplizieren, genügt es, die beiden Glieder der Summe oder der Differenz mit dieser dritten Zahl zu multiplizieren. Es bleibt noch die Gleichheit der Vorzeichen zu beweisen. Angenommen, α sei an absolutem Wert größer als β: so hat die Summe der Zahlen α, β das Vorzeichen von α; daß Produkt dieser Summe mit γ hat also das Vorzeichen von $\alpha\gamma$; aber von den beiden Produkten $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ hat das erste den größten Wert, gibt also auch der Summe der Zahlen $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ sein Vorzeichen: diese Summe hat also dasselbe Vorzeichen wie das Produkt der Summe der beiden Zahlen α, β mit γ.

Der Satz bleibt bestehen für den Fall, wo die beiden Zahlen α, β symmetrisch sind und für denjenigen, wo γ Null ist. In beiden Fällen sind die beiden Zahlen, deren Gleichheit zu beweisen ist, gleich Null.

97. Allgemeiner gesagt, erhält man das Produkt der Summe einer beliebigen Anzahl relativer Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ mit einer beliebigen relativen Zahl, indem man die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ mit dieser Zahl multipliziert und die Teilprodukte addiert. Der Satz, der für den Fall aufgestellt ist, wo die Summe zwei Glieder enthält, erstreckt sich direkt auf den Fall, wo sie drei, vier . . . Glieder enthält: er ist allgemein.

98. Angenommen endlich, man habe die Summe σ der relativen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ mit der Summe σ' der relativen Zahlen $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$ zu multiplizieren. Man kann dieses Produkt erhalten, indem man jedes der Glieder $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ der Summe σ mit σ' multipliziert und die Teilprodukte addiert; nun kann man das Produkt von σ' mit einem dieser Glieder erhalten, indem man eine jede der Zahlen $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$ mit diesem Gliede multipliziert und die so entstandenen Teilprodukte addiert: man sieht also, daß man das Produkt der beiden Summen σ, σ' erhalten kann, indem man jedes einzelne Glied von σ mit jedem einzelnen Glied von σ' multipliziert und alle so entstandenen Teilprodukte addiert; die Anzahl dieser Teilprodukte ist das Produkt der Anzahl der Glieder von σ mit der Anzahl der Glieder von σ'.

Man sieht, daß die Grundeigenschaften der Multiplikation, die wir bei den ganzen Zahlen festgestellt haben, auch bei den relativen Zahlen zutreffen und uns so zu den angenommenen Definitionen berechtigen. Dasselbe gilt für die folgenden Sätze, die, wie wir gleich sehen werden, uns gestatten, eine große Anzahl besonderer Fälle unter eine einzige Regel zu bringen.

99. Betrachten wir eine Achse (Nr. 83) und stellen wir uns einen Körper vor, der sich gleichmäßig auf dieser Achse bewegt; nehmen wir an, man habe eine Zeiteinheit gewählt, und es sei PQ der *Vektor*, den der Körper während der Zeiteinheit beschreibt: die Richtung dieses Vektors zeigt an, in welcher Richtung der Körper sich bewegt, sei sie nun positiv oder entgegengesetzt.

Das Wort *Geschwindigkeit* hat drei Bedeutungen: man versteht darunter entweder den Vektor PQ selbst, oder sein algebraisches Äquivalent, oder den absoluten Wert dieses algebraischen Äquivalents. Während wir diese letzte Bedeutung in Nr. 35 angenommen hatten, *werden wir jetzt die zweite annehmen.*

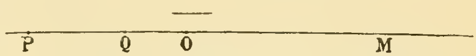


Fig. 18.

Nehmen wir an, man habe auf der Achse einen Ausgangspunkt O gewählt, und zwar so, daß jedem Punkt der Achse eine relative Zahl entspreche, nämlich seine Abszisse; ferner habe man als Ausgangszeitpunkt den Augenblick gewählt, in dem der Körper durch den Punkt O hindurch geht; jeder Augenblick in der Zeitdauer wird in dem Falle durch eine positive oder eine negative Zahl bestimmt werden.

Dieses angenommen, stellen wir folgenden Satz auf:

Die Abszisse des beweglichen Körpers, in einem beliebigen Augenblick, ist gleich dem Produkt seiner Geschwindigkeit mit der Zeit, d. h. mit der Zahl, die den betreffenden Augenblick bestimmt.

Die Gleichheit dieser beiden Zahlen, was deren absolute Werte angeht, geht aus dem in Nr. 35 formulierten Satz hervor; was die Vorzeichen betrifft, so genügt es zu bemerken, daß, wenn der Körper sich in positiver Richtung bewegt, d. h. wenn die Geschwindigkeit $\overline{PQ}$ positiv ist, der Körper (angenommen, die positive Richtung sei die Richtung des Pfeiles) sich rechts oder links vom Punkt O befindet, je nachdem die Zeit positiv oder negativ ist; das Vorzeichen der Abszisse ist kein anderes als dasjenige des Produkts der Zeit mit der Geschwindigkeit. Diese letzte Schlußfolgerung bleibt bestehen, wenn die Geschwindigkeit negativ ist.

100. Betrachten wir zwei nicht parallele Linien (D') und (R) in einer Ebene. Unter *Projektion* eines beliebigen *Punktes* A der Ebene auf die Gerade (D') versteht man den Schnittpunkt A' dieser Geraden (D') und der durch den Punkt A zu (R) gelegten Parallelen: Diese Projektion nennt man orthogonal, wenn die Gerade (R) senkrecht auf der Geraden (D') steht. Die Projektion eines Vektors AB auf (D') ist der Vektor $A'B'$, dessen Ausgangs- und Endpunkt die respektiven Projektionen des Ausgangs- und Endpunktes des Vektors AB auf (D') sind.

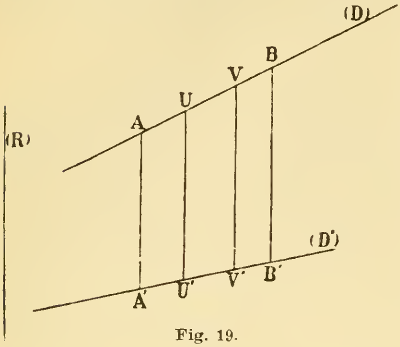


Fig. 19.

Sehen wir nun die Geraden (D), (D') als Achsen an, d. h. nehmen wir an, man habe eine Längeneinheit gewählt, und auf einer jeden der Geraden eine positive Richtung. Man lasse dann jedem Punkt der Achse (D) seine Projektion auf die Achse (D'), und jedem auf (D) gelegenen Vektor dessen Projektion auf (D') entsprechen. Es sei speziell UV der Einheitsvektor der Achse (D) (Nr. 83) und $U'V'$ dessen Projektion auf die Achse (D'). Man kann nun folgenden Lehrsatz aufstellen:

Das algebraische Äquivalent $\overline{A'B'}$ des Vektors $A'B'$, der die Projektion des auf der Achse (D) gelegenen Vektors AB auf die Achse (D') bildet, ist gleich dem Produkt des algebraischen Äquivalents $\overline{AB}$ dieses Vektors mit dem algebraischen Äquivalent $\overline{U'V'}$ des Vektors $U'V'$, der durch die Projektion des Einheitsvektors UV mit der Achse (D') entstanden ist. Daß die beiden Zahlen, deren Gleichheit zu beweisen ist, denselben absoluten Wert haben, geht direkt aus Nr. 54 hervor. Es bleibt also nur mehr die Identität der Vorzeichen für die relative Zahl $\overline{A'B'}$ einerseits und das Produkt der Zahlen $\overline{AB}$, $\overline{U'V'}$ andererseits festzustellen.

Nun aber sieht man gleich aus der Figur, daß, wenn die Vektoren AB, UV auf der Geraden (D) dieselbe Richtung haben, dies auch für die auf der Geraden (D') liegenden Vektoren $A'B'$, $U'V$, zutrifft; daß hingegen, wenn die Vektoren AB, UV der Geraden (D) entgegengesetzter Richtung sind, dasselbe von den Vektoren $A'B'$, $U'V'$ der Geraden (D') zu sagen ist. Im ersten Falle ist die Zahl $\overline{AB}$ positiv; ihr Produkt mit $\overline{U'V'}$ hat dasselbe Vorzeichen wie $\overline{U'V'}$, d.

h. wie $\overline{A'B'}$; im zweiten Falle ist die Zahl $\overline{AB}$ negativ; ihr Produkt mit $\overline{U'V'}$ hat das entgegengesetzte Vorzeichen von $\overline{U'V'}$, d. h. dasselbe Vorzeichen wie $\overline{A'B'}$.

101. Die Division zweier relativer Zahlen kann man als umgekehrte Multiplikation definieren: der *Quotient* ist eine relative Zahl, die man mit dem *Divisor* multiplizieren muß, um den *Dividenden* zu erhalten.

Wäre der Divisor gleich O, so wäre sein Produkt mit einer beliebigen Zahl auch gleich O und könnte also nie dem Dividenden gleich sein, es sei denn, daß dieser auch O wäre. Die Division durch O ist also entweder unmöglich oder unbestimmt: sie hat keinen Sinn; der Fall, wo der Divisor O ist, ist gänzlich auszuschließen.

102. Es geht aus der vorhergehenden Definition und aus der Definition der Multiplikation hervor, daß der absolute Wert des Quotienten gleich sein muß dem Quotienten der absoluten Werte des Dividenden und des Divisors, und daß das Vorzeichen dieses Quotienten $+$ oder $-$ sein muß, je nachdem der Dividend und der Divisor gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Umgekehrt sieht man gleich, daß das Produkt der so gebildeten Zahl mit dem Divisor gleich ist dem Dividenden.

Man ändert den Quotienten nicht, wenn man den Dividenden und den Divisor mit derselben Zahl multipliziert.

103. Um eine relative Zahl β durch die relative Zahl α zu dividieren, genügt es, sie durch die umgekehrte Zahl α' zu multiplizieren (Nr. 95): Die Beweisführung ist mit derjenigen in Nr. 38 identisch.

Da man die Division einer relativen Zahl β durch eine relative Zahl α auf die Multiplikation von β durch die entsprechende umgekehrte Zahl α' zurückführen kann, so sieht man gleich (Nr. 96), daß der Quotient der Summe zweier relativer Zahlen β, γ durch α gleich ist der Summe der Quotienten, die man erhält, wenn man die beiden Zahlen β, γ durch α dividiert.

§ 6. Algebraische Operationszeichen.

104. Die Anwendung der eben wiederholten Theorien wird durch die in der Algebra übliche Schreibweise sehr erleichtert.

Nehmen wir zuerst an, man gebe den absoluten Wert und das Vorzeichen der relativen Zahlen, mit denen man operiert, ausdrücklich an.

Um die Summe mehrerer relativer Zahlen -7, $+5$, $+3$, $-\frac{1}{2}$ zu bezeichnen, schreibt man einfach diese Zahlen mit ihren Vorzeichen der Reihe nach hin; man schreibt also $-7+5+3-\frac{1}{2}$, was gleich $+\frac{1}{2}$ ist; da man die Glieder umstellen kann, kann man auch schreiben $+5-7+3-\frac{1}{2}$; $+3+5-7-\frac{1}{2}\ldots$ Man pflegt jedoch das erste Vorzeichen wegzulassen, wenn es ein $+$ Zeichen ist; man schreibt also $5-7+3-\frac{1}{2}$; $3+5-7-\frac{1}{2}$ hat dieselbe Bedeutung. Es könnte anscheinend Verwechslung entstehen zwischen dieser Ausdrucksweise und der in der Arithmetik gebräuchlichen, wo die Vorzeichen $+$, $-$ operatorische Zeichen sind. In Wirklichkeit hat die Ausdrucksweise $5-7+3-\frac{1}{2}$ keinen Sinn in der Arithmetik, da die *Subtraktion* $5-7$, die man gleich ausführen müßte, unmöglich ist; die Ausdrucksweise $3+5-7-\frac{1}{2}$ hingegen hat einen Sinn in der Arithmetik: es ist dasselbe wie $8-7-\frac{1}{2}$ wie $1-\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{2}$. Die beiden Schreibweisen hätten genau dieselbe Bedeutung, wenn man *übereinkäme, die positiven Zahlen mit ihren absoluten Werten zu identifizieren.* Dieses Resultat ist allgemein für den Fall von zwei Zahlen, wie man leicht einsieht, wenn man auf die Definition der Addition der relativen Zahlen zurückgeht. Dann sehen wir uns die beiden einzigen Fälle an, wo Verwechslung mit der arithmetischen Bezeichnungsweise möglich ist; die erste Zahl muß positiv sein, und die zweite, wenn negativ, ist kleiner als die erste, oder derselben gleich an absolutem Werte. Man addiert zwei positive Zahlen, $+3$ und $+5$ zum Beispiel, sei es nun, daß man $+3+5$ oder $3+5$ schreibe, indem man ihre absoluten Werte 3, 5 addiert und vor das Resultat das Zeichen $+$ setzt; kommt man überein, 8 und $+8$ als identisch anzusehen, so ist das Resultat dasselbe, stelle man sich nun auf den Standpunkt der Algebra oder auf den der Arithmetik. Desgleichen addiert man die positive Zahl $+7$ und die negative Zahl -5, sei es nun, daß man $+7-5$, oder $7-5$ schreibe, den eben gemachten Voraussetzungen gemäß, indem man die Differenz 2 zwischen den beiden absoluten Werten 7 und 5 sucht, und vor dieselbe das Zeichen $+$ setzt, das Vorzeichen derjenigen von den beiden Zahlen $+7$ und -5, deren absoluter Wert der höchste ist. Kommt man überein, 2 und $+2$ als identisch anzusehen, so ist das Resultat dasselbe. Von dem Fall zweier Zahlen kommt man auf den Fall, wo man drei, vier . . . Zahlen hat: und das Resultat ist allgemein.

105. Hat eine algebraische Addition, die nach den oben gegebenen Erklärungen ausgedrückt ist, zufällig eine arithmetische Bedeutung, wenn man den Vorzeichen $+$ und $-$ die operatorische Bedeutung gibt, die sie in der Arithmetik haben, d. h. sind die durch diese Zeichen angedeuteten Operationen in arithmetischem Sinne möglich, und zwar in der angegebenen Reihenfolge, so ist das Resultat, wozu die arithmetische Bezeichnungsweise führt, gleich der algebraischen Summe, vorausgesetzt, daß man diesem Resultat das Vorzeichen $+$ gebe, oder daß man die positiven Zahlen mit ihren absoluten Werten identifiziere. Wir werden später die Vorteile dieser Identifizierung kennen lernen; angedeutet wurden sie schon in Nr. 72.

106. Um die Differenz zweier relativer Zahlen zu bezeichnen, schreibt man die Summe der ersten und der symmetrischen Zahl der zweiten hin: so kann die Differenz zwischen $+7$ und $+5$ geschrieben werden $+7-5$, oder $7-5$; die Differenz zwischen $+7$ und -5 kann man durch $+7+5$ oder durch $7+5$ bezeichnen; die Differenz zwischen -7 und $+5$ durch $-7-5$; die Differenz zwischen -7 und -5 durch $-7+5$. Natürlich hat auch hier die Bezeichnungsweise $7-5$, welche in der Arithmetik die Differenz 2 zwischen 7 und 5 darstellt, dieselbe Bedeutung sowohl in der Arithmetik als in der Algebra, wenn man 2 und $+2$ als identisch ansieht.

Um eine algebraische Summe von einer gegebenen Zahl abzuziehen, kann man die Elemente dieser Summe der Reihe nach hinzuaddieren, nachdem man ihre Vorzeichen geändert hat (Nr. 88). Hiernach ist die Differenz zwischen $+3$ und $+7-5-1$ gleich $3-7+5+1$.

107. Um das Produkt von zwei oder mehreren relativen Zahlen zu bezeichnen, kann man eine jeden dieser Zahlen zwischen Klammern setzen und sie dann aneinander reihen, und zwar ohne Trennungszeichen oder mit dazwischen gesetztem $\times$-Zeichen oder Punkte. So stehen die Bezeichnungen

$$(+3)(+4), \qquad (+3)(-4), \qquad (-3)(-4),$$

oder

$$(+3)\times(+4), \qquad (+3)\times(-4), \qquad (-3)\times(-4),$$

für die Produkte von $+3$ mit $+4$, von $+3$ mit -4, und von -3 mit -4, d. h. für die Zahlen $+12$, -12, $+12$. Diese Schreibweisen, die wir erklären müssen, sind nicht sehr gebräuchlich, wie wir bald sehen werden. Es sei noch auf die Ausdrucksweisen

$$(+3)(+4) = +3 \times 4, \qquad (+3)(-4) = -3 \times 4$$

(Nr. 94) hingewiesen: auf den zweiten Seiten muß das arithmetische Produkt 3×4, das man zwischen Klammern setzen könnte, als ausgeführt angesehen werden.

108. Um den Quotienten von zwei relativen Zahlen zu bezeichnen, schreibt man den Dividenden über den Divisor und trennt beide durch einen horizontalen Strich. So drückt man die Quotienten von $+3$ durch -5, und von $+\frac{1}{3}$ durch $-\frac{3}{5}$ folgendermaßen aus:

$$\frac{+3}{-5}, \qquad \frac{+\frac{1}{3}}{-\frac{3}{5}}.$$

Sie sind nach Nr. 101 gleich $-\frac{3}{5}$, resp. $-\frac{5}{9}$. Es ist dieselbe Bezeichnungsweise wie bei den verallgemeinerten Brüchen. Man kommt auf diese Weise dazu, mit Brüchen zu operieren, deren Glieder relative Zahlen sind: solche Brüche nennt man oft *algebraische Brüche:* sie haben die Grundeigenschaften der verallgemeinerten Brüche. Ihr *Wert* (d. h. die relative Zahl, die man erhält, wenn man Zähler durch Nenner dividiert) ändert nicht, wenn man die beiden Glieder mit derselben Zahl multipliziert (Nr. 102). Zwei algebraische Brüche sind gleich, wenn das Produkt des Zählers des ersten mit dem Nenner des zweiten gleich ist dem Produkte des Zählers des zweiten mit dem Nenner des ersten. Man kann mehrere Brüche durch gleiche Brüche mit demselben Nenner ersetzen. Die Regel über die Addition der Brüche mit gleichem Nenner läßt sich auch hier anwenden (Nr. 103); desgleichen natürlich die Regeln über die Multiplikation und Division. Bemerkt sei noch, daß man den umgekehrten Wert eines algebraischen Bruches (Nr. 103) durch Umstellung der Glieder erhält.

109. Man gebraucht oft Buchstaben zur Bezeichnung der relativen Zahlen*). So kann man übereinkommen, den Buchstaben a für die Zahl $+5$, oder die Zahl -5, oder die Zahl $-\frac{2}{7}$, usw. zu setzen.

Bezeichnet a eine relative Zahl, so pflegt man durch $+a$ das-

*) Im vorhergehenden Paragraphen hat man sich ausschließlich griechischer Buchstaben bedient: diese Beschränkung fällt jetzt weg.

selbe wie a, und durch $-a$ die symmetrische Zahl derjenigen, für die a steht, auszudrücken. Steht z. B. a für $+5$, so ist $+a$ auch $+5$ und $-a$ gleich -5; bezeichnet a -5, so ist $+a$ auch -5, $-a$ aber $+5$.

110. Wir nehmen endgültig die Konvention an, die darin besteht, daß man die positiven Zahlen mit ihren absoluten Werten identifiziert, daß man folglich 5 und $+5$ als identisch ansieht: sie ist ähnlich derjenigen, nach welcher man a und $+a$ als identisch ansieht und mit einem Buchstaben a sowohl eine relative als auch eine absolute Zahl bezeichnen kann.

Wenn a für eine absolute Zahl, 5 zum Beispiel, steht, so ist es klar, daß a, $+a$, 5, $+5$, dasselbe bedeuten, und daß die symmetrische Zahl der einen oder andern von diesen Zahlen mit $-a$ oder -5 zu bezeichnen ist; der Leser darf aber nicht vergessen, daß man im allgemeinen mit a oder $+a$ sowohl eine negative als auch eine positive oder absolute Zahl bezeichnen kann. Desgleichen kann $-a$ für eine positive Zahl stehen: das geschieht, wenn a eine negative Zahl bezeichnet. Wenn man so einen Buchstaben zur Bezeichnung einer relativen Zahl gebraucht, ist es von allererster Bedeutung, die *scheinbaren* Vorzeichen von den *wirklichen* zu unterscheiden: bei den Bezeichnungen $+a$, $-a$, sind die scheinbaren Vorzeichen $+$, resp. $-$; ist a eine positive oder eine absolute Zahl, so sind $+$ und $-$ auch die wirklichen Vorzeichen von $+a$ und $-a$; ist aber a negativ, so sind die wirklichen Vorzeichen $-$, resp. $+$. Wenn man sagt, das wirkliche Vorzeichen einer Zahl sei $+$, so versteht man darunter, daß diese Zahl positiv ist; wenn man sagt, das wirkliche Vorzeichen einer Zahl sei $-$, so versteht man darunter, daß diese Zahl negativ ist.

Von einem Buchstaben, der kein scheinbares Vorzeichen hat, wird nach dem, was vorausgeht, angenommen, er habe das scheinbare Vorzeichen $+$.

111. Die angenommene Identifizierung der positiven und der absoluten Zahlen veranlaßt uns, von Operationen zu sprechen, die zugleich an absoluten und an relativen Zahlen vorgenommen werden. Man wird alle oben für die relativen Zahlen entwickelten Definitionen annehmen, indem man die absoluten Zahlen als positive Zahlen ansieht, indem man, wenn man will, ihnen das Vorzeichen $+$ gibt. Das ist sicher statthaft; denn geht man auf die Definitionen der vier Operationen, die an positiven Zahlen vorgenommen werden, zurück, so sieht man gleich ein, daß sie mit den Definitionen derselben Operationen an den absoluten Zahlen der Arithmetik zusammenfallen, wenn diese letzten

Operationen einen Sinn haben, die Identität der absoluten und der positiven Zahlen natürlich vorausgesetzt.

112. Will man die Summe mehrerer relativer oder absoluter Zahlen ausdrücken, sei es nun, daß diese Zahlen durch Ziffern oder durch Buchstaben bezeichnet sind, so setzt man zuerst das Vorzeichen + vor die Zahlen oder Buchstaben, die mit keinem scheinbaren Zeichen versehen sind, und schreibt dann die so gebildeten Symbole der Reihe nach nieder, indem man, wenn man will, das scheinbare Vorzeichen des ersten Gliedes wegläßt, wenn es + ist; so bezeichnet also $+a-5+b$, oder $a-5+b$ die Summe der Zahlen a (oder $+a$), -5 und b (oder $+b$).

Wir möchten hier bemerken, daß das Symbol $a+b$ die algebraische Summe der Zahlen a und b (oder $+a$ und $+b$) bezeichnet, und das Symbol $a-b$ entweder die Summe der Zahlen a (oder $+a$) und $-b$, oder die Differenz zwischen den Zahlen a und b (oder $+b$), da ja $-b$ die symmetrische Zahl von b ist (Nr. 89, 109). In anderen Worten, man kann bei diesen Symbolen, wie man es in der ganzen Theorie der relativen Zahlen getan hat, die Vorzeichen als wesentlich zu den nachstehenden Zahlen oder Buchstaben gehörend ansehen; man kann sie aber auch als von diesen Zahlen oder Buchstaben getrennt und mit einer operatorischen Bedeutung versehen auffassen, und zwar so, daß + die Bedeutung der Addition, − die Bedeutung der Subtraktion hat. Diese doppelte Bedeutung ist sehr bequem; aber man darf nicht außer acht lassen, daß jedesmal, wenn von einer *algebraischen* Summe die Rede ist, die Vorzeichen + und − als zu den nachstehenden Zahlen oder Buchstaben gehörend angesehen werden, und daß, wenn man von einem Gliede dieser Summe spricht, man darunter das Ganze zu verstehen hat, das durch die Zahl oder den Buchstaben und das vorhergehende Vorzeichen gebildet wird.

113. Der Leser weiß, daß, wenn man einen Ausdruck zwischen Klammern setzt, man dadurch andeuten will, daß er als ausgerechnet anzusehen ist; es ist, wie wenn man den Wert dieses Ausdrucks durch einen Buchstaben wiedergeben wollte. Gemäß dem, was vorhergeht, ändert man die Bedeutung einer solchen Klammer nicht, wenn man ihr das Vorzeichen + gibt; gibt man ihr das Vorzeichen −, so versteht man unter dem so gebildeten Symbol die symmetrische Zahl derjenigen, welche durch die Klammer bezeichnet wurde. So z. B. haben die Symbole

$$+a-b+c,\ a-b+c,\ (a-b+c),\ +(a-b+c),\ +(+a-b+c)$$

alle dieselbe Bedeutung, nämlich die Summen der Zahlen a, $-b$, c; die Symbole $-(a-b+c)$, $-(+a-b+c)$ bezeichnen die symmetrische Zahl der vorhergehenden, nämlich (Nr. 88) die Summe der Zahlen $-a$, b, $-c$, die symmetrischen Werte von a, $-b$, c.

Die Ausdrucksweise $a-(b-c+d)$ bezeichnet entweder die Summe der beiden Zahlen a und $-(b-c+d)$ oder die Differenz zwischen der Zahl a und der Zahl $b-c+d$; diese Differenz ist auch die Summe der Zahl a und der Zahl $-b+c-d$; sie kann bezeichnet werden durch $a-b+c-d$. Es ist dies die Regel über das Abziehen einer algebraischen Summe von einer Zahl, an die in Nr. 106 erinnert worden war.

114. Wenn in einer algebraischen Summe Teilsummen von zwischen Klammern gesetzten Gliedern figurieren, so kann man diese Klammern weglassen, wenn sie mit dem Vorzeichen $+$ versehen sind; haben sie aber das Vorzeichen $-$, so kann man sie nur unter der Bedingung streichen, daß man die Vorzeichen eines jeden der zwischen Klammern stehenden Glieder ändert. Kommt man durch solche Streichungen in die Lage, zwei Vorzeichen $+$ oder $-$ nacheinander setzen zu müssen, was eintreffen wird, wenn das erste zwischen Klammern stehende Glied ein Vorzeichen hat, so ersetzt man zwei Vorzeichen derselben Gattung ($++$ oder $--$) durch ein Vorzeichen $+$, und zwei entgegengesetzte Vorzeichen ($+-$ oder $-+$) durch ein Vorzeichen $-$.

115. Will man das Produkt von zwei oder mehreren relativen Zahlen schriftlich ausdrücken, angenommen, sie werden z. B. durch die Buchstaben a, b, c, d, ohne scheinbares Vorzeichen oder, was dasselbe ist, mit dem Vorzeichen $+$ vor einem jeden, bezeichnet, so schreibt man diese Buchstaben ohne irgendwelches Trennungszeichen hintereinander: $abcd$; das ist eine pure Konvention. Man kann auch mit derselben Bedeutung $+abcd$ schreiben; $-abcd$ würde natürlich die symmetrische Zahl des fertigen Produktes von a, b, c, d darstellen. Man könnte übrigens ebensogut zwischen zwei Buchstaben eines der Multiplikationszeichen ($\times$ oder $\cdot$) einschieben.

Handelt es sich nun um das Produkt von relativen Zahlen, für welche Buchstaben mit oder ohne scheinbare Vorzeichen stehen, so schreibt man die betreffenden Buchstaben hintereinander und setzt davor das Zeichen $+$, wenn keine Buchstaben mit dem Vorzeichen $-$ darunter sind, oder wenn solche in gerader Zahl vorhanden sind; dagegen setzt man davor das Zeichen $-$, wenn eine ungerade Zahl von Buchstaben mit dem Vorzeichen $-$ vorliegt; wieviel Buchstaben ohne scheinbare Vorzeichen oder mit dem scheinbaren Vorzeichen + vorhanden sind, ist nicht von Belang. Diese letzte Regel resultiert aus der ersten Konvention; man muß sich nämlich daran erinnern, daß ein Produkt sein Vorzeichen ändert, wenn ein Faktor desselben sein Vorzeichen ändert und also unverändert bleibt, wenn man die Vorzeichen von zwei Faktoren ändert; hätten alle Buchstaben a, b, c, d das scheinbare Vorzeichen +, so würde gemäß der früheren Konvention das Produkt der durch dieselben bezeichneten relativen Zahlen $+abcd$ geschrieben werden: ersetzt man einen der Faktoren durch dessen symmetrische Zahl, so wird das Produkt $-abcd$ usw.

Im besonderen schreibt man das Produkt von $+a$ mit $+b$, oder von $-a$ mit $-b$, als $+ab$ an; das Produkt von $+a$ mit $-b$, oder von $-a$ mit $+b$ hingegen als $-ab$.

116. Eine ähnliche Konvention besteht für den Fall, wo einer der Faktoren numerisch ist; so stellt $5ab$ oder $+5ab$ das Produkt der Zahlen 5 (oder + 5), a, b dar; $-5ab$ dasjenige der Zahlen -5, a, b; man setzt gewöhnlich den numerischen Faktor an erste Stelle und bezeichnet ihn als *Koeffizienten*; man betrachtet das scheinbare Vorzeichen des Produktes als Bestandteil des Koeffizienten: so ist bei $5ab$ der Koeffizient 5 oder auch, wenn man will $+5$; bei $-5ab$ ist er -5. Enthält das in Frage stehende Produkt, wie z. B. abc oder $-abc$, keinen numerischen Faktor, so nimmt man an, sein Koeffizient sei 1, wenn kein scheinbares Vorzeichen vorhanden oder wenn das scheinbare Vorzeichen + ist; ist es aber —, so nimmt man an, der Koeffizient sei -1.

117. Es mag angebracht sein, zu bemerken, daß das Produkt einer relativen Zahl a durch eine ganze absolute (oder positive) Zahl n als die Summe von n Zahlen, die a gleich sind, angesehen werden kann, wie solches direkt aus den Definitionen der Multiplikation und der Addition hervorgeht: $5a$ ist die Summe von 5 Zahlen, die a gleich sind, $-5a$ ist die Summe von 5 Zahlen, die $-a$ gleich sind. Desgleichen ist $2ab$ gleich $ab + ab$, und $-2ab$ gleich $-ab - ab$.

118. Man bezeichnet als Monom in $a, b, c, \ldots$ ein Produkt von Faktoren, von denen jeder durch einen der Buchstaben $a, b, c, \ldots$ dargestellt wird, und einem numerischen Faktor, der gleich $+1$ oder -1 sein kann; dieses Produkt ist übrigens mit einem scheinbaren Vorzeichen versehen, das, wenn es nicht ausgedrückt ist, als + anzusehen ist: so sind z. B. $\frac{1}{2}aabbbc$, $-aabbc$ Monome in a, b, c, deren

Koeffizienten $\frac{1}{2}$ und -1 sind, und deren Vorzeichen $+$ und $-$ sind. Zwei Monome werden als ähnlich bezeichnet, wenn sie sich nur durch die numerischen Koeffizienten oder die Zeichen unterscheiden: so sind $2aab$, $-3aab$ ähnliche Monome: kraft des Satzes in Nr. 97 kann die Summe zweier ähnlicher Monome durch ein ähnliches Monom ersetzt werden; die Summe der beiden vorhergehenden Monome kann man also, wenn man das Produkt aab als ausgeführt ansieht, folgendermaßen schreiben:

$$(2-3) \times aab = -aab.$$

Die Differenz derselben Monome oder die Summe der zwei Monome $2aab$ und $3aab$ ist ebenso

$$(2+3) \times aab = 5aab.$$

Die Regel, nach der man zwei ähnliche Monome addiert, besteht darin, daß man die Koeffizienten addiert und die Buchstaben dahinter setzt. Nicht zu vergessen ist bei der Anwendung dieser Regel, daß man ein Monom, in dem kein Koeffizient ausdrücklich figuriert, als mit dem Koeffizienten 1 versehen betrachtet, wenn kein scheinbares Vorzeichen in demselben vorhanden oder wenn das scheinbare Vorzeichen $+$ ist; daß man ihm den Koeffizienten -1 beilegt, wenn das scheinbare Vorzeichen $-$ ist: so ist die Summe der Monome ab und $\frac{1}{2}ab$ gleich $\frac{3}{2}ab$, diejenige der Monome $-ab$ und $\frac{1}{2}ab$ gleich $-\frac{1}{2}ab$.

Der Grad eines Monoms in $a, b, c, \ldots$ ist die Zahl der Faktoren, die durch die in demselben figurierenden Buchstaben bezeichnet werden, so z. B. ist 6 der Grad des Monoms $\frac{1}{2}aabbbc$.

Gibt man den Buchstaben $a, b, c, \ldots$, die in einem Monom figurieren, numerische Werte, so kann man den *numerischen Wert* des Monoms berechnen; man braucht nur die angedeuteten Multiplikationen auszuführen, so z. B. ist der Wert des Monoms $-5aabc$ für $a=+2$, $b=-1$, $c=3$, gleich 60: dieser Wert hängt natürlich von den numerischen Werten ab, die man den Buchstaben gibt.

119. Ein Polynom in $a, b, c, \ldots$ ist eine algebraische Summe von Monomen in $a, b, c, \ldots$ und einer Zahl (genannt *Konstante*), die übrigens 0 sein kann. So z. B. stellt der Ausdruck $aa - 3bc + 5a - 8$ ein Polynom in a, b, c dar; es ist die algebraische Summe der Monome aa, $-3bc$, $5a$ und der Zahl 8. Nimmt man numerische Werte für die Buchstaben an, so erhält auch das Polynom einen numerischen

Wert, den man findet, indem man die respektiven Werte seiner Monome sucht und dann die algebraische Summe dieser Werte und des konstanten Gliedes ausrechnet. So z. B. ist der Wert des eben erwähnten Polynoms, für $a = +2$, $b = -1$, $c = 3$, gleich $4 + 9 + 10 - 8$ oder 15.

Ein Polynom nennt man *reduziertes* Polynom, wenn keine ähnlichen Glieder mehr in demselben figurieren. Man kann immer durch Anwendung der Regel über die Summe zweier ähnlicher Monome ein Polynom in $a, b, c, \ldots$ durch ein reduziertes Polynom ersetzen, das aber dann immer denselben Wert wie das in Frage stehende Polynom haben muß, welches auch die numerischen Werte der Buchstaben a, b, c, ... seien.

Der Grad eines reduzierten Polynoms in $a, b, c, \ldots$ ist der höchste Grad der darin figurierenden Monome. Haben alle diese Monome denselben Grad und kommt kein konstantes Glied darin vor, so bezeichnet man das Polynom als *homogen*; sein Grad ist der Grad eines beliebigen der darin figurierenden Monome, $5aa + 3bc - 3cc$ ist ein homogenes Polynom zweiten Grades.

120. Das Produkt mehrerer Faktoren, die alle derselben Zahl a gleich sind, heißt eine Potenz von a: es ist die zweite Potenz (oder das Quadrat) von a, die dritte Potenz (oder der Kubus) von a, die vierte Potenz, ... je nachdem man 2, 3, 4, ... Faktoren hat, die gleich a sind. Die erste Potenz von a sieht man als a gleich an. Um die zweite, die dritte, die vierte, ... Potenz von a zu bezeichnen, schreibt man, anstatt aa, aaa, $aaaa$, ... der Kürze halber a^2, a^3, a^4, ... indem man als *Exponent* rechts oben hinter den Buchstaben oder die den Faktor bezeichnende Zahl die natürliche Zahl*) setzt, welche ausdrückt, wie oft dieser Faktor vorkommt: Diese Ausdrücke a^2, a^3, a^4 liest man: „a hoch 2, 3, 4, ..., und oft läßt man sogar, wenn keine Verwechslung zu befürchten ist, das Wort „hoch" weg. Diese Konvention einmal angenommen, schreibt man die Monome $\frac{1}{2}aabbbc$, $-aabcc$ kürzer $\frac{1}{2}a^2b^3c$, $-a^2bc^2$. Der Grad eines Monoms in a, b, c,

*) Ich erinnere daran, daß unter *natürlichen* Zahlen die ganzen absoluten Zahlen 1, 2, 3, ..., mit Ausschluß von 0 zu verstehen sind, und ich benutze diese Gelegenheit, um zu sagen, daß man mit dem Namen „ganze Zahl" eine Zahl bezeichnet, deren absoluter Wert 0 oder eine natürliche Zahl ist; *Rationalzahl* nennt man eine Zahl, deren absoluter Wert 0 oder ein Bruch mit ganzen Gliedern ist; die Rationalzahlen begreifen die ganzen Zahlen in sich. Endlich versteht man unter *reeller* Zahl eine Zahl, sei sie nun positiv, null oder negativ, die entweder eine Rational-, oder eine Irrationalzahl ist.

ist die Summe der Exponenten, die bei diesen Buchstaben stehen, indem man diejenigen, die keinen Exponenten haben, als mit dem Exponenten 1 versehen betrachtet.

Beiläufig sei noch bemerkt, daß das Quadrat a^2 einer Zahl a, oder das Produkt aa, positiv ist, welches auch immer a sei, vorausgesetzt, daß die Zahl a nicht Null sei: denn die beiden Faktoren a, a haben augenscheinlich dasselbe Zeichen. Im allgemeinen ist eine Potenz mit geradem Exponenten eine positive Zahl, während eine Potenz mit ungeradem Exponenten dasselbe Zeichen hat wie die Zahl, die man zu dieser Potenz erhebt.

121. Um zwei Potenzen desselben Buchstabens, a^3 und a^5 z. B., zu multiplizieren, genügt es, die Exponenten zu addieren: in anderen Worten, $a^3 \times a^5 = a^8$, denn es sind augenscheinlich $3 + 5$ oder 8 Faktoren a in dem ersten Gliede, das ja ursprünglich $aaa \times aaaaa$ lautete. Bei der Anwendung dieser Regel darf man nicht vergessen, daß man a als mit dem Exponenten 1 versehen betrachten muß; man hat also $a^3 \times a = a^{3+1} = a^4$.

Um zwei Monome zu multiplizieren, bildet man zuerst das Produkt der numerischen Koeffizienten und schreibt dahinter die Buchstaben, die in einem jeden der Monome figurieren; und zwar diejenigen, die in beiden figurieren, mit einem Exponenten, welcher gleich ist der Summe der Exponenten, mit denen sie in einem jeden der Faktoren versehen sind; diejenigen aber, die nur in einem der Faktoren figurieren, mit dem Exponenten, den sie dort haben. So ist das Produkt von $5\,a^3 b\, c$ mit $-\frac{1}{2} a^2 b^3 d$ gleich $-\frac{5}{2} a^5 b^4 c\, d$. Man sieht gleich, daß der Grad des Produktes nichts anderes ist, als die Summe der Grade der einzelnen Faktoren.

122. Um das Produkt eines Polynoms mit einem Polynom zu bilden, genügt es, jedes Polynom als die algebraische Summe der Monome und des konstanten Gliedes, aus denen es besteht, anzusehen, dann die Regel aus Nr. 98 über die Bildung des Produktes zweier algebraischen Summen und die vorhergehenden Regeln über das Produkt zweier Monome anzuwenden und endlich das so entstandene Polynom zu reduzieren (Nr. 118, 119, 120).

123. Das wesentliche Objekt der Algebra ist das Studium der Polynome, im besondern das Studium der Art der Abhängigkeit, ihres Wertes von den numerischen Werten, die man den in denselben figurierenden Buchstaben gibt.

Unter den Polynomen sind die einfachsten diejenigen, die durch einen Buchstaben, sagen wir x, gebildet werden. Ein Monom in x ist weiter nichts als eine gewisse Potenz von x, die mit einem numerischen Faktor multipliziert wird; $-4x^5$, $3x$ sind Monome in x: $-4x^5$, $3x^5$ sind ähnliche Monome (Nr. 118), vom Grade 5; ihre Summe ist das Monom $-x^5$. Ein Polynom in x ist die Summe von Monomen in x und des konstanten Gliedes. Man kann dasselbe immer als reduziert ansehen: sein Grad ist die höchste darin vorkommende Potenz von x (Nr. 119): $3x+1$, $5x^2-3x+1$ sind Polynome ersten und zweiten Grades. Der *Wert* eines Polynoms in x ist leicht zu berechnen, wenn man einen bestimmten Wert für x annimmt: man braucht nur die angedeuteten Operationen auszuführen; so z. B. ist der Wert von $5x^2-3x+1$, für $x=1$, gleich 3; für $x=-1$ wäre er 9. Jedem Wert von x entspricht ein Wert des Polynoms; man drückt das aus, indem man sagt, das Polynom sei eine *Funktion* von x, x als eine Variable angesehen (Nr. 50).

Die Koeffizienten eines Polynoms in x, zu denen man gewöhnlich auch das konstante Glied zählt, sind Zahlen; aber nichts hindert uns, sie durch Buchstaben auszudrücken: nur muß man darauf achtgeben, daß diese Buchstaben eine ganz andere Bedeutung haben als der Buchstabe x: von diesem nimmt man an, daß er jeden beliebigen Wert haben kann, während die Buchstaben, die man an Stelle der numerischen Koeffizienten setzt, bestimmte Zahlen ausdrücken; sie sind, wie man sagt, Konstanten, während x eine Veränderliche ist. Der Gebrauch der Buchstaben für die Koeffizienten gestattet uns, für alle Polynome desselben Grades dieselben Symbole zu verwenden. So z. B. steht das Symbol $ax+b$, indem a, b die numerischen Koeffizienten sind, für irgendein beliebiges Polynom vom ersten Grade in x; das Symbol ax^2+bx+c für irgendein beliebiges Polynom vom zweiten Grade in x, usw.

Man bezeichnet als Wurzeln eines Polynoms die Werte von x, die man annehmen muß, damit der Wert des Polynoms 0 sei. Das Aufsuchen der Wurzeln eines Polynoms ist eines der hauptsächlichsten Probleme der Algebra.

124. Den Quotienten zweier Zahlen, die durch Ziffern oder durch Buchstaben mit scheinbaren Vorzeichen oder ohne dieselben ausgedrückt sind, kann man auf zweifache Weise darstellen: entweder, indem man, wie oben (Nr. 108) erklärt worden ist, die Symbole, die für den Dividenden und den Divisor stehen, durch einen Strich trennt, so daß das eine über dem andern steht, oder besser, indem man weder dem Zähler noch dem Nenner ein Vorzeichen gibt, sondern + oder — vor den Bruch setzt, je nachdem der Dividend und der Divisor dasselbe Vorzeichen oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Diese Regel, bei der man natürlich die Glieder ohne scheinbares Vorzeichen als mit dem (scheinbaren) Vorzeichen + versehen betrachten muß, geht direkt aus den Regeln über die Multiplikation hervor. Das Zeichen + vor dem Strich kann übrigens gestrichen werden: den Quotienten von a oder $+a$ durch b oder $+b$ und denjenigen von $-a$ durch $-b$ kann man also $+\frac{a}{b}$ oder $\frac{a}{b}$ schreiben; denjenigen von a (oder $+a$) durch $-b$, und denjenigen von $-a$ durch b (oder $+b$) aber $-\frac{a}{b}\cdot$ Diese Bezeichnungsweise kann man natürlich anwenden, um den Quotienten der Division zweier Monome darzustellen. Den so geschriebenen Bruch kann man übrigens vereinfachen, indem man die dem Zähler und dem Nenner gemeinschaftlichen Faktoren, wenn solche vorhanden sind, streicht.

125. Wir wollen nun die Grundeigenschaften der arithmetischen oder algebraischen Operationen aufzählen. Sie sind, in der Bezeichnungsweise der Algebra ausgedrückt, in den folgenden Gleichheiten enthalten, waren aber schon in gewöhnlicher Sprache in Nr. 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 27, 36, 44, 45, 87, 88, 94, 96, 97, 98, 101, 102, 103 formuliert worden.

$$a + b = b + c, \tag{1}$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c, \tag{2}$$

$$a + 0 = a, \tag{3}$$

$$(a - b) + b = a, \tag{4}$$

$$a + (b - c) = a + b - c, \tag{5}$$

$$a - (b + c) = a - b - c, \tag{6}$$

$$a - (b - c) = a - b + c, \tag{7}$$

$$(a + c) - (b + c) = (a - c) - (b - c) = a - b, \tag{8}$$

$$ab = ba, \tag{9}$$

$$a(bc) = (ab)c = abc, \tag{10}$$

$$a \times 1 = a, \tag{11}$$

$$a(b + c) = ab + ac, \tag{12}$$

$$a(b - c) = ab - ac, \tag{13}$$

$$\frac{a}{b} \times b = a, \tag{14}$$

(15) $$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b},$$

(16) $$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b} = \frac{a + a'}{b},$$

(17) $$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'},$$

(18) $$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{a'}{b'}\right)} = \frac{ab'}{ba'}.$$

Über diese Gleichheiten lassen sich folgende Bemerkungen machen: für die fünf letzten besteht die Beschränkung, daß in keiner Division der Divisor 0 sein darf; sonst sind sie alle richtig, welches auch die Zahlen seien, die durch die Buchstaben a, b, c, a', b', ... bezeichnet werden, ob es nun ganze Zahlen, Bruchzahlen, Irrationalzahlen, absolute, positive oder negative Zahlen seien.

Die drei ersten Gleichheiten geben die Grundeigenschaften der Addition wieder, oder vielmehr ermöglichen es, dieselben leicht zu finden. Die Gleichheit (4) kann einerseits als eine Folge der Gleichheit $(a + b) + c = a + (b + c)$, in der man b durch $-b$ und c durch b ersetzt, kombiniert mit der Relation (3), aufgefaßt werden; andererseits kann man darin eine Definition der Differenz zwischen a und b sehen. Die Relationen (5), (6), (7) sind nur besondere Formen der Relation (2), bei der man nur das erste und das dritte Glied berücksichtigt; denn wenn man darin c oder $+c$ in $-c$ umändert, nimmt sie die Form (5) an; ändert man b und c in $-b$, $-c$, so tritt $-b-c$ oder $-(b+c)$ an Stelle von $(b+c)$ (Nr. 88); die Gleichheit nimmt also die Form (6) an, ... Stellen wir uns auf einen andern Standpunkt, so können die Gleichheiten (5), (6), (7), (8) als Eigenschaften der Addition und der Subtraktion angesehen werden, indem wir den Vorzeichen $+$ und $-$ operatorische Bedeutung geben. Die Relationen (9), (10), (11), (12) geben die Grundeigenschaften der Multiplikation wieder oder ermöglichen es, dieselben zu finden.

Zu bemerken ist, daß die Relation (12) nichts weiter ist als ein besonderer Fall der allgemeinen Relation

(12 bis) $$a(b + c + \ldots + l) = ab + ac + \ldots + al.$$

Die Punkte ... zwischen den Klammern deuten an, daß man eine beliebige Anzahl Glieder haben kann, während die Punkte auf der zweiten Seite diejenigen Glieder ersetzen, welche nach Art der geschriebenen gebildet sind, und die man erhält, indem man die durch

Punkte ersetzten Glieder der ersten Seite mit a multipliziert. Es ist unnötig zu sagen, daß man in der Gleichheit (12 bis) jede beliebige Zahl durch die derselben entsprechende symmetrische Zahl ersetzen könnte; ändert nun z. B. in der Gleichheit

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad$$

c oder $+c$ in $-c$ um, so wird $+ac$ zu $-ac$, und man hat

$$a(b-c+d)=ab-ac+ad;$$

ändert man in dieser letzten Gleichheit wieder a in $-a$ um, so werden ab, $-ac$, $+ad$ zu $-ab$, resp. $+ac$, resp. $-ad$, und man erhält

$$-a(b-c+d)=-ab+ac-ad;$$

das erste Glied dieser Gleichheit kann man dann nach Belieben als das Produkt von $-a$ mit $(b-c+d)$ oder als den symmetrischen Wert von $a(b-c+d)$ ansehen. Im besondern läßt sich die Gleichheit (13) aus der Gleichheit (12) durch Umänderung von c in $-c$ ableiten.

Die Formel (14) kann als Definition der Division aufgefaßt werden. In den Formeln (17) und (18), welche die Regeln über Multiplikation und Division der algebraischen Brüche ausdrücken, stellen die ersten Seiten das Produkt resp. den Quotienten der Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ dar. Die Gleichheiten (1) und (9) drücken die sogenannte *kommutative* Eigenschaft der Addition und der Multiplikation aus; die Gleichheiten (2) und (10) die *assoziative* Eigenschaft derselben Operationen, die Gleichheit (12) endlich die *distributive* Eigenschaft der Multiplikation in bezug auf die Addition.

126. In bezug auf die Ungleichheiten (wo bekanntlich die Zeichen $<$, $>$ die Bedeutung „kleiner als“, „größer als“ haben und die Öffnung des Zeichens stets der größern Zahl zugewandt ist) wollen wir uns folgende Resultate merken:

Die Ungleichheit $a>0$ hat dieselbe Bedeutung wie „die Zahl a ist positiv“; die Ungleichheit $a<0$ ist dasselbe wie: „a ist negativ“. Die Ungleichheiten $a>b$, $a-b>0$ haben dieselbe Bedeutung (Nr. 92). Von den beiden Ungleichheiten $a>b$, $a+c>b+c$ enthält die eine die andere (Nr. 93). Dasselbe gilt von den Ungleichheiten $a>b$, $ac>bc$, wenn c positiv ist: denn $ac-bc=(a-b)c$ hat dann dasselbe wirkliche Vorzeichen wie $a-b$; dasselbe gilt auch von den Ungleichheiten $a>b$, $ac<bc$, wenn c negativ ist. Die Ungleichheiten $a>b$, $a'>b'$ enthalten die andere Ungleichheit $a+a'>b+b'$; sie ziehen die Ungleichheit $aa' > bb'$ nach sich, wenn b und b' positive Zahlen sind.

127. Ich muß einen Augenblick auf den in Nr. 66 formulierten Satz über die absoluten Zahlen zurückkommen.

Dieser Satz erstreckt sich auch auf die relativen Zahlen. Er besagt nun folgendes: Ändert man die Zahlen, an denen man Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen oder Divisionen vornimmt, nur sehr wenig, so wird dadurch das Endresultat der Operationen nur sehr wenig geändert.

Man kann sogar behaupten, daß die durch die Änderung der gegebenen Zahlen herbeigeführte Änderung des Resultates eine beliebig geringe ist, vorausgesetzt, daß die erste Änderung klein genug sei; so daß man, wenn es möglich ist, die gegebenen Zahlen, mit denen man operieren muß, mit einem beliebig hohen Grade von Annäherung zu erhalten, auch das Resultat mit einem beliebig hohen Grade von Annäherung erhalten kann. Nichts hindert uns, anzunehmen, daß man nur mit zwei Zahlen auf einmal operiere; ja sogar, daß man nur eine derselben ändere, da man sie ja geradesogut eine nach der andern ändern kann. Sagt man, daß zwei positive oder negative Zahlen nicht sehr voneinander verschieden sind, so bedeutet das, daß ihre Differenz einen sehr geringen absoluten Wert hat: ist eine dieser Zahlen a, so kann man die andere durch $a + \alpha$ darstellen, wobei α eine positive oder negative Zahl mit sehr geringem absolutem Wert bedeutet.

Handelt es sich um Addition oder Subtraktion, so ist es klar, daß, wenn man eines der Glieder a, b durch $a + \alpha$, $b + \alpha$ ersetzt, die Differenz zwischen dem ersten Resultat und dem zweiten α oder $-\alpha$ ist, da man ja sagen kann:

$$(a + \alpha) + b - (a + b) = a + \alpha + b - a - b = \alpha,$$
$$a - (b + \alpha) - (a - b) = a - b - \alpha - a + b = -\alpha;$$

der Satz ist evident.

Handelt es sich um die Multiplikation der Zahlen a, b usw., so ist, wenn man zum Beispiel a durch $a + \alpha$ ersetzt, die Differenz zwischen dem zweiten Produkt und dem ersten $b\alpha$, da man ja sagen kann:

$$(a + \alpha)\, b - ab = ab + \alpha b - ab = b\alpha.$$

Diese Differenz kann man als beliebig gering annehmen, vorausgesetzt, daß α einen genügend geringen absoluten Wert habe: denn bezeichnet man durch b' und α' die absoluten Werte von b und α

und will man, daß der absolute Wert $b'\alpha'$ des Produktes $b\alpha$ geringer sei als eine gegebene, beliebig kleine positive Zahl ε, so genügt es, α' so zu wählen, daß $\alpha' < \frac{\varepsilon}{b'}$.

Da die Division von a durch b nichts anderes ist als die Multiplikation von a mit $\frac{1}{b}$ (Nr. 101), so genügt es, zur Aufstellung des Satzes für den Fall der Division zu beweisen, daß der umgekehrte Wert einer Zahl sich beliebig wenig ändert, vorausgesetzt, daß man die Zahl selbst genügend wenig ändere. Angenommen, man ersetzt b durch $b + \alpha$; so hat man für den Unterschied zwischen dem alten Resultat und dem neuen:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b+\alpha} = \frac{b+\alpha}{b\,(b+\alpha)} - \frac{b}{b\,(b+\alpha)} = \frac{\alpha}{b\,(b+\alpha)}.$$

Es seien b' und α' die absoluten Werte von b und α; ferner sei B eine beliebige positive Zahl, kleiner als b'.

Wir wählen nun α' so, daß

$$\alpha' < b' - B$$

oder

$$B < b' - \alpha',$$

was dasselbe ist

Der absolute Wert des Bruches, der oben im letzten Gliede steht, ist der Quotient des absoluten Wertes α' des Zählers durch den absoluten Wert des Nenners. Dieser letzte Wert ist stets größer als B^2: Denn der absolute Wert von $b + \alpha$, der $b' + \alpha'$ oder $b' - \alpha'$ ist, je nachdem b und α gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, ist in jedem Falle größer als B. Da man den Quotienten zweier positiver Zahlen vergrößert, wenn man den Divisor verkleinert, so ist der absolute Wert der Differenz

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b+\alpha} = \frac{\alpha}{b\,(b+\alpha)}$$

kleiner als $\frac{\alpha'}{B^2}$; und wenn man will, daß er geringer sei als eine gegebene positive Zahl ε, so genügt es, $\alpha' < B^2\,\varepsilon$ anzunehmen. Der Satz ist also für alle Fälle genügend bewiesen. Der letzte Fall jedoch gibt zu einer Bemerkung Anlaß: wenn die Zahl b einen sehr geringen absoluten Wert hat, so ist es mit B, und a fortiori mit B^2 und $B^2\,\varepsilon$ ebenso, so daß man die Zahl b nur äußerst wenig ändern darf, will man ein nur wenig verändertes Resultat erhalten. In anderen Worten, in dem Falle, wo der Divisor einen geringen absoluten Wert hat, kann ein geringer (absoluter) Fehler im Divisor einen nennenswerten Fehler im Quotienten hervorrufen. Man wird bemerkt haben, daß in diesem Falle der Bruch $\frac{1}{b}$, dessen Nenner einen sehr geringen absoluten Wert hat, selbst einen sehr großen absoluten Wert erhält; wenn z. B. b gleich $\frac{1}{10\,000}$ ist, so ist $\frac{1}{b}$ gleich 10000: man nähert sich einem Grenzfall, in dem b gleich 0 wäre und $\frac{1}{b}$ folglich keinen Sinn hätte; das ist die Ursache, weshalb man bei der Anwendung des allgemeinen Satzes so vorsichtig zuwege gehen muß.

Es wäre leicht gewesen, bei den verschiedenen Operationen die Differenz zwischen dem Resultat der Operation mit beiderseitig modifizierten Zahlen $a + \alpha$, $b + \beta$ und dem Resultat der Operation mit den Zahlen a, b zu berechnen. Diese Berechnung ist übrigens von Wert für die Bestimmung des Fehlers, den man begeht, indem man die Zahlen $a + \alpha$, $b + \beta$ den Zahlen a, b substituiert. Ich will das nicht weiter ausführen; nur möchte ich folgende, allgemein bekannte Bemerkungen machen.

128. Handelt es sich darum, den Wert eines Polynoms in a, b, c, ... für gewisse, diesen Veränderlichen gegebene, numerische Werte zu berechnen, so kann man, da man nur Multiplikationen, Additionen und Subtraktionen auszuführen hat, um zum Resultat zu gelangen, sicher sein, daß kleine, an den Werten der Veränderlichen a, b, c, ... begangene Fehler nur einen kleinen Fehler im Werte des Polynoms nach sich ziehen werden. Wollen wir uns genauer ausdrücken, so können wir sagen: Sind die an den Veränderlichen a, b, c, ... begangenen Fehler genügend klein, so kann der daraus für den Wert des Polynoms sich ergebende Fehler beliebig klein werden. Dies ist auch der eigentliche Sinn der Ausdrucksweise: Ein Polynom ist eine stetige Funktion der Veränderlichen a, b, c ... Ich werde übrigens auf diesen Begriff der Stetigkeit zurückkommen müssen.

129. Multipliziert man zwei Größen von sehr geringem absolutem Werte, so ist deren Produkt an absolutem Werte viel kleiner als jede von beiden; so hat z. B. das Produkt zweier Zahlen, deren absoluter Wert geringer ist als 0,001, selbst einen absoluten Wert kleiner als 0,000001; und es geschieht häufig, besonders bei Berechnungen praktischer Art, daß solche Produkte ohne Nachteil unberücksichtigt bleiben können, weil die Größen, die sie darstellen würden, entweder gar nicht zu unterscheiden, oder bedeutend kleiner als die zu befürchtenden Meßfehler wären. Natürlich gilt das, was wir eben von dem Produkte zweier sehr kleiner Größen gesagt haben, a fortiori von den Produkten von drei, vier, . . . sehr kleinen Größen, und auch von den sukzessiven Potenzen α^2, α^3, α^4, . . . einer an absolutem Wert sehr kleinen Größe α.

130. Hat man ein Polynom in x, und will man besonders die kleinen Werte von x betrachten, so wird man natürlich dieses Polynom nach steigenden Potenzen von x anordnen, d. h. zuerst das konstante Glied hinschreiben, wenn eins vorhanden ist, dann das Glied von dem kleinsten Grade, dann das Glied von dem kleinsten Grade unter denen, die übrig bleiben, usw. Angenommen, das Polynom enthalte keinen sehr großen numerischen Koeffizienten, so hat jedes Glied einen absoluten Wert, der im Vergleich mit den vorhergehenden gering ist, da es eine höhere Potenz von x enthält. Streicht man die Glieder von einem gewissen Grade an, so erhält man ein Polynom, das einfacher ist als das gegebene, und für kleine Werte von x mit sehr geringem Unterschied denselben Wert hat, wie das betreffende Polynom.

Nehmen wir z. B. das Polynom

$$3 - 2x + 4x^2 - x^3 + 3x^4.$$

Ich nehme an, man wolle dessen Wert berechnen für einen Wert von x, der geringer sei als der absolute Wert einer positiven Zahl α. Ist α genügend klein, so kann man die Polynome

$$\begin{array}{l} 3, \\ 3 - 2x, \\ 3 - 2x + 4x^2, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

als Näherungswerte des gegebenen Polynoms betrachten; natürlich ist das zweite Polynom im allgemeinen genauer als das erste, das dritte genauer als das zweite, usw. Nimmt man z. B. an, $\alpha = 0{,}001$, so sind die absoluten Werte von x^3 und x^4 kleiner als 0,000000001, und 0,000000000001. Will man das Resultat nur bis auf sechs oder sieben Dezimalstellen genau berechnen, so ist es vollständig nutzlos, sich um die Glieder mit x^3 und x^4 zu kümmern, und es genügt, den Wert des Polynoms $3 - 2x + 4x^2$ zu berechnen. Wollte man das Resultat nur bis zur vierten Stelle berechnen, so würde es selbstverständlich genügen, den Wert von $3 - 2x$ zu berechnen. Wenn man es nur bis auf 0,01 genau haben wollte, könnte man direkt sagen, es sei 3.

Übrigens ist es nicht schwer, den Fehler, den man auf diese Weise begeht, grosso modo zu berechnen.

Man sieht sofort, daß der absolute Wert eines Polynoms in x jedenfalls geringer ist als die Summe der absoluten Werte seiner Koeffizienten, wenn x an absolutem Wert kleiner ist als 1: denn da einerseits eine algebraische Summe höchstens der Summe der absoluten Werte ihrer Glieder gleich ist, so ist der absolute Wert des Polynoms höchstens der Summe der absoluten Werte der in demselben enthaltenen Monome gleich; ersetzt man andererseits x durch 1 in einem jeden dieser Monome, so erhöht man den absoluten Wert dieses Monoms.

Betrachten wir nun das nach steigenden Potenzen von x geordnete Polynom

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$$

Der absolute Wert der Veränderlichen x sei kleiner als die positive Zahl α, und α selbst sei kleiner als 1. Läßt man nun in diesem Polynom alle Glieder vom dritten Grade an weg, so wird der Fehler, den man begeht, gleich sein

$$dx^3 + ex^4 + \ldots = x^3(d + ex + \ldots).$$

Im zweiten Gliede ist der Koeffizient von x^3 ein Polynom in x, dessen absoluter Wert kleiner ist als die Summe D der absoluten Werte seiner Koeffizienten $d, e, \ldots$; und da der absolute Wert von x^3 kleiner ist als α^3, so ist der Fehler an absolutem Wert kleiner als $D\alpha^3$.

Fassen wir uns allgemein, so können wir sagen: Ist in dem gegebenen Polynom das erste unberücksichtigte Glied vom n-ten Grad, so ist der begangene Fehler an absolutem Wert kleiner als $S \cdot \alpha^n$, wobei S die Summe der absoluten Werte der Koeffizienten der unberücksichtigten Glieder bedeutet. Es wäre übrigens leicht, diesen Fehler genauer zu bestimmen. Wir wollen uns indes auf die angegebene Regel beschränken. Man sieht z. B. leicht ein, daß der Fehler, den man bei der Ausrechnung des Polynoms

$$3 - 2x + 4x^2 - x^3 + 3x^4$$

unter Berücksichtigung von nur 1, 2, 3 Gliedern begeht, kleiner ist als

$$0{,}001,\ 0{,}00001,\ 0{,}00000001,$$

falls x kleiner ist als $\alpha = 0{,}001$.

§ 7. Gleichungen.

131. Unter Gleichung versteht man bekanntlich eine Gleichheit, die einen oder mehrere Buchstaben enthält und nur für gewisse diesem oder diesen Buchstaben gegebene Werte richtig ist; so ist z. B. die Gleichheit $x = 7$ nur richtig, wenn man für x den Wert 7 annimmt. Die Gleichheit $x + y = 7$ ist eine Gleichung, die nur richtig ist, wenn man x, y Werte gibt, deren Summe 7 ist. Der Leser hat sicher schon Gleichungen oder Systeme von Gleichungen aufgelöst, d. h. den Wert oder die Werte der Unbekannten gefunden, für welche diese Gleichungen richtig sind. Geschieht diese Auflösung anfänglich auch wohl, ohne allzu sehr auf die Prinzipien zu achten, so bedarf es doch nur geringer Überlegung, um zu erkennen, auf welcher Annahme die zur Auflösung angewandten Verfahren beruhen. Man erkennt leicht, daß man sich bei der Auflösung die Unbekannten durch Zahlen, die den Gleichungen genügen, ersetzt denkt und dann folgende Sätze anwendet:

Eine Gleichheit ändert sich nicht, wenn man zu beiden Seiten dieselbe Zahl addiert oder subtrahiert;

Eine Gleichheit ändert sich nicht, wenn man beide Seiten mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert (letztere muß jedoch von Null verschieden sein);

Addiert oder subtrahiert man die entsprechenden Seiten zweier oder mehrerer Gleichheiten, so entsteht immer eine neue Gleichheit; usw.

Alle diese Sätze sind evident. Wendet man die oben genannten Sätze richtig an, so gelangt man in den einfachen Fällen sofort dazu, die Unbekannte oder die Unbekannten zu *bestimmen*, d. h. eine oder mehrere Gleichheiten zu bilden, deren rechte Seiten bekannte Zahlen und deren linke Seiten eben die Buchstaben sind, deren Werte man sucht. Die Existenz dieser Werte war Voraussetzung. Ein Beispiel möge diese Ausführungen erläutern.

Es soll eine Zahl x gesucht werden, die der Gleichung

$$(1) \qquad 7x - 9 = 3x + 1$$

besteht. Die Existenz einer solchen Zahl soll vorausgesetzt werden. Aus dieser Annahme folgt dann sofort, daß die Gleichung weiter nichts ist als eine Gleichheit zwischen zwei Zahlen; diese Gleichheit zieht nun, infolge von Operationen, die wir wohl nicht alle auszuführen brauchen, folgende Gleichheiten nach sich:

$$(2) \qquad 7x = 3x + 10,$$

$$(3) \qquad 4x = 10,$$

$$(4) \qquad x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Der einzige direkte Schluß, den wir aus diesen Rechnungen ziehen können, ist der, daß, *wenn eine Zahl existiert, für welche die gegebene Gleichung richtig ist,* der Wert dieser Zahl 2,5 ist; es bleibt also nur noch festzustellen, was übrigens keine Schwierigkeiten bietet, daß die gegebene Gleichung wirklich für diese Zahl richtig ist. Diese Feststellung oder *Probe* (die wegen der etwa vorgekommenen Rechenfehler immer von Nutzen ist) kann durch Anwendung einiger allgemeiner Sätze vermieden werden. Nur die einfachsten sollen hier Erwähnung finden; ich möchte jedoch noch bemerken, daß die direkte Probe sich vermeiden läßt, wenn man den vorhin gegangenen Weg von (1) bis (4) jetzt rückwärts verfolgt. Ist nämlich $x = \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$, so erkennt man der Reihe nach, ohne Berechnung, daß auch die Gleichungen (4), (3), (2), (1) richtig sind.

132. Zwei Gleichungen heißen äquivalent, wenn die *Lösungen* der einen (d. h. die Zahlen, die dieser Gleichung genügen) zugleich auch Lösungen der andern sind. Um zu beweisen, daß zwei Gleichungen äquivalent sind, muß man beweisen, daß jede Lösung der ersten auch eine Lösung der zweiten ist.

Ist eine Gleichung gegeben, so erhält man eine äquivalente Gleichung, indem man zu beiden Seiten der Gleichung dieselbe Größe addiert.

Diese Größe kann entweder eine reine Zahl sein oder ein Ausdruck, der die Unbekannte oder die Unbekannten enthält. Betrachten wir den zweiten Fall; er ist allgemein. Ist die erste Gleichung richtig für irgendeinen Wert der Unbekannten, so sind ihre beiden Seiten für diesen Wert gleiche Zahlen; sie bleiben gleich, wenn man dieselbe Zahl hinzufügt, nämlich den Wert, den der den beiden Gliedern hinzugefügte Ausdruck für diesen Wert der Unbekannten ergibt. Mit andern Worten: Ist die erste Gleichung für irgendeinen Wert der Unbekannten richtig, so ist es auch die zweite. Die erste läßt sich aus der zweiten ableiten, indem man von beiden Seiten dieser zweiten Gleichung den Ausdruck abzieht, den man zu beiden Seiten der ersten hinzugefügt hatte; d. h. indem man zu beiden Seiten der zweiten Gleichung diesen Ausdruck mit umgekehrten Vorzeichen addiert.

Wir haben also bewiesen, daß, wenn die zweite Gleichung für irgendeinen Wert der Unbekannten richtig ist, dies auch von der ersten Gleichung gilt: die beiden Gleichungen sind also äquivalent.

Ist eine Gleichung gegeben, so erhält man eine äquivalente Gleichung, indem man ihre beiden Seiten mit einer und derselben von 0 verschiedenen Zahl multipliziert. Man sieht gleich, daß, wenn die erste Gleichung für irgendeinen Wert der Unbekannten richtig ist, dies auch von der zweiten gilt. Übrigens kommt man von der zweiten Gleichung auf die erste, indem man die beiden Seiten mit dem umgekehrten Wert derjenigen Zahl multipliziert, mit der man die beiden Seiten der ersten multipliziert hat; also ist, wenn die zweite für einen gewissen Wert der Unbekannten richtig ist, die erste es auch, und die beiden Gleichungen sind äquivalent. Der Fall, wo die Zahl, die man als Multiplikator gebraucht, 0 ist, ist auszuschließen, weil dann die zweite Gleichung auf die sinnlose Gleichheit $0 = 0$ herauskäme; man könnte natürlich nichts daraus ableiten, indem man die beiden Glieder mit dem umgekehrten Wert von 0 multipliziert, weil dies keinen Sinn hat.

Auf den Fall, wo man die beiden Seiten nicht mehr mit einer konstanten, von 0 verschiedenen Zahl, sondern mit einem Ausdruck, der die Unbekannte enthält, multipliziert, will ich nicht eingehen; ich begnüge mich, darauf hinzuzeigen, daß die Schwierigkeit dieses Falles gerade in dem Umstand begründet ist, daß dieser Ausdruck und sein umgekehrter Wert sich gegenseitig aufheben oder überhaupt aufhören können, für gewisse Werte dieser Unbekannten einen Sinn zu haben.

Im Vorhergehenden habe ich nur von einer Unbekannten gesprochen; aber es ist klar, daß die bewiesenen Sätze auch für die Gleichungen mit mehreren Unbekannten richtig sind.

Man sieht direkt, daß, gemäß diesen Sätzen die Gleichungen (1) und (2), (2) und (3), (3) und (4) äquivalent sind; ohne die Probe zu machen, ist man sicher, daß 2,5 die einzige Lösung der Gleichung (1) ist.

Ist eine Gleichung gegeben, so kann man ein Glied von einer Seite auf die andere bringen, *indem man das Vorzeichen dieses Gliedes ändert;* denn das ist im Grunde genommen dasselbe, wie wenn man den beiden Seiten der Gleichung den symmetrischen Wert dieses Gliedes hinzufügte. So z. B. ist die Gleichung (2) äquivalent mit der Gleichung

$$7x - 3x = 3x + 10 - 3x,$$

die man erhält, indem man $-3x$ zu den beiden Seiten addiert, d. h. äquivalent mit der Gleichung

$$7x - 3x = 10.$$

Man hat das Glied $3x$ von der zweiten auf die erste Seite gebracht, indem man sein Vorzeichen geändert hat.

133. Setzt man so alle Glieder, die x enthalten, auf eine Seite und alle bekannten Zahlen auf die andere und gibt man der Gleichung die Form

$$ax = b,$$

in der a und b bekannte Zahlen sind, so genügt es, auf die Definition der Division zurückzugehen, um zu sehen, daß der Wert von x, für den diese Gleichung richtig ist, $x = \frac{b}{a}$ ist, unter der Bedingung, daß a nicht 0 sei.

Wird die Gleichung unter der Form

$$ax + b = 0$$

gegeben, immer angenommen, daß a und b gegebene Zahlen bezeichnen, von denen die erste nicht 0 ist, so sieht man, daß sie äquivalent ist mit der Gleichung $ax = -b$, die als einzige Lösung hat

$$x = -\frac{b}{a}.$$

134. Allgemein gesprochen, hat man alle Glieder einer Gleichung in x auf die erste Seite der Gleichung gebracht, so daß das zweite Glied 0 ist, und ist dann das erste Glied ein Polynom in x, vom ersten, zweiten, dritten, ... Grade, so sagt man, man habe eine Gleichung vom ersten, zweiten, dritten ... Grade vor sich. Die Auflösung dieser Gleichung kommt darauf hinaus, die *Wurzeln* des Polynoms zu suchen (Nr. 123); diese nennt man dann auch *Wurzeln* oder *Lösungen* der Gleichung. Die Gleichung vom ersten Grade $ax + b = 0$ hat eine Wurzel, und zwar nur eine einzige: $x = -\frac{b}{a}$.

§ 8. Planimetrie.

135. Es ist unnötig, auf die Begriffe: Gerade Linie, Winkel, Nebenwinkel, Summe oder Differenz von Winkeln*) zurückzukommen; ebenso auf die Definition zweier Senkrechten, welche die Ebene in vier gleiche Winkel, *Rechte* genannt, teilen; auf die Eigenschaft eines Dreieckes, zwei gleiche Seiten zu besitzen, wenn zwei von den Winkeln gleich sind, und umgekehrt auf die Eigenschaften eines gleichschenk-

*) Ich möchte jedoch kurz darauf hinweisen, daß das Wort Winkel im Sprachgebrauch zwei etwas voneinander verschiedene Bedeutungen hat; man sagt einerseits, ein Winkel sei die *Figur*, die durch zwei von demselben Punkte ausgehende Strahlen gebildet wird; spricht man aber z. B. von der Summe zweier Nebenwinkel, so bedeutet das Wort *Winkel* vielmehr den Teil der Ebene, der *innerhalb* dieser so definierten Figur liegt. Jeder im Innern eines Winkels gelegene Punkt kann als auf einer begrenzten geraden Linie liegend betrachtet werden, deren Endpunkte auf den Schenkeln des Winkels liegen.

ligen Dreiecks, sich durch Drehung um die Höhe, die vom Scheitel ausgeht, mit sich selbst decken zu können: denn diese *Höhe* ist zugleich *Mittellinie* und *Winkelhalbierende*; oder daß ein Dreieck gleichschenkelig ist, wenn zwei von den drei Geraden Höhe, Mittellinie und Winkelhalbierende zusammenfallen.

Was den Fall der Kongruenz*) der Dreiecke anbetrifft, so will ich darüber nur ein Wort sagen, um einen wichtigen Begriff einzuführen und die Art und Weise der Formulierung dieser Sätze etwas näher zu beleuchten.

136. Sind zwei kongruente oder inkongruente Dreiecke gegeben, so kann man auf verschiedene Weise eine *Zuordnung* der Elemente dieser Dreiecke herbeiführen. Wählen wir nach Belieben eine Spitze A des ersten Dreiecks, so kann man ihm nach Belieben eine Spitze A' des zweiten zuordnen: darunter versteht man, daß der Gedanke an die Spitze A des ersten Dreiecks in uns den Gedanken an die Spitze A' des zweiten Dreiecks hervorruft und umgekehrt; der *Seite* des ersten Dreiecks, die der Spitze A gegenüberliegt, entspricht nun natürlich die Seite des zweiten Dreiecks, die der Spitze A' gegenüberliegt; umgekehrt könnte man nach Belieben zwei Seiten, die den beiden Dreiecken angehören, als gegenseitig zugeordnet bezeichnen; daraus würde dann hervorgehen, daß die gegenüberliegenden Spitzen auch als zugeordnet betrachtet werden.

Kehren wir zu den zwei Dreiecken zurück, bei denen wir die beiden Spitzen A, A' als zugeordnet angenommen haben. Man kann zwei andere Spitzen B und B' wählen, die auch zugeordnet sein sollen; es ist dann natürlich, daß die Spitzen C und C' zugeordnet sind. Hat man eine Zuordnung der Spitzen aufgestellt, so geht daraus die Zuordnung der Seiten hervor: zwei Seiten, die zwei zugeordneten Spitzen gegenüberliegen, sind zugeordnet, die Seite, die zwei Spitzen eines Dreiecks miteinander verbindet, ist der Seite des andern Dreiecks, welche die zugeordneten Spitzen miteinander verbindet, zugeordnet; desgleichen geht aus einer angenommenen Zuordnung der Seiten die Zuordnung der Spitzen hervor. Dasselbe gilt von der Zuordnung der Winkel.

*) Bekanntlich definiert man die Kongruenz zweier Figuren in der Geometrie durch die Möglichkeit, sie zur Deckung zu bringen: diese Deckung bringt sozusagen eine *Zuordnung* der Punkte der beiden Figuren hervor; zwei Punkte, die der einen und der andern der kongruenten Figuren angehören, können als einander zugeordnet betrachtet werden, wenn sie sich decken in dem Falle, wo die Figuren selbst, zu denen sie gehören, zur Deckung gebracht werden.

Hat man Buchstaben, welche die Spitzen zweier zugeordneten Dreiecke bezeichnen, zu schreiben, so ist es von Wichtigkeit, die zugeordneten Buchstaben in derselben Reihenfolge zu schreiben: Sind A und A', B und B', C und C' zugeordnet, so bezeichne man die beiden Dreiecke durch ABC, $A'B'C'$ oder besser noch durch $\begin{matrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{matrix}$.

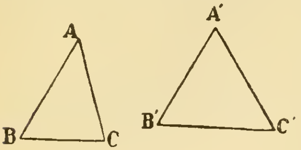


Fig. 20.

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn man dieselben einander so zuordnen kann, daß zwei Seiten des einen und der da zwischen liegende Winkel den ihnen zugeordneten Seiten des andern resp. dem zwischen diesen liegenden Winkel gleich sind; oder auf solche Weise, daß zwei Winkel des einen dieser Dreiecke und die Seite, die ihre zwei Scheitel miteinander verbindet, den beiden ihnen zugeordneten Winkeln des andern Dreiecks resp. der Seite, die deren Scheitel miteinander verbindet, gleich sind; oder endlich so, daß die drei Seiten des einen Dreiecks den ihnen zugeordneten Seiten des andern gleich sind: in diesen drei Fällen ist jedes Element eines Dreiecks dem ihm zugeordneten Elemente des andern gleich. Handelt es sich um zwei rechtwinklige Dreiecke, so nehme ich an, daß man bei den gleich zu erörternden Zuordnungen immer die beiden Scheitel der rechten Winkel und folglich die diesen gegenüberliegenden Hypotenusen einander zuordnen soll. Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind kongruent, wenn man dieselben einander so zuordnen kann, daß zwei Elemente des einen (Winkel oder Seiten), bei denen wenigstens eine Seite, aber kein rechter Winkel figuriert, den ihnen entsprechenden Elementen des andern gleich sind.

137. Der Leser weiß, daß man unter zwei Parallelen zwei Geraden versteht, die in derselben Ebene liegen und sich nicht schneiden, selbst wenn man sie unendlich verlängert; daß man durch einen gegebenen Punkt eine und nur eine einzige Parallele zu einer gegebenen Geraden legen kann: daß zwei Gerade, die einer dritten parallel sind, selbst parallel sind; daß zwei Parallelen gleichen Abstand haben, und allgemeiner gesagt, daß die zwischen zwei Parallelen liegenden Stücke von Parallelen gleich sind.

138. An den Satz über die acht Winkel, die durch zwei Parallelen und eine Schnittlinie gebildet werden, genügt es, bloß kurz zu erinnern. Die vier Winkel, die durch einen kleinen Kreisbogen bezeichnet sind, sind gleich; desgleichen die durch nichts bezeichneten

Winkel. Die Summe eines der vier letzten und eines der vier ersten Winkel beträgt zwei rechte Winkel. Betrachten wir umgekehrt in einer Ebene zwei Geraden (A), (B) und eine Schnittlinie (C), so kann man, wenn zwei der durch Kreisbogen bezeichneten Winkel, die nicht Scheitelwinkel sind, gleich sind, oder auch zwei der unbezeichneten Winkel, die nicht Scheitelwinkel sind, behaupten, daß diese beiden Geraden (A), (B) parallel sind. Der direkte Satz dient im besonderen dazu, zu zeigen, daß in jedem Dreieck die Winkelsumme gleich zwei Rechten ist: er läßt folgende Verallgemeinerung zu: zwei Winkel, deren Seiten parallel sind und dieselbe Richtung haben, oder parallel sind mit entgegengesetzter Richtung, sind gleich. Sind zwei Seiten parallel und von derselben Richtung und zwei Seiten parallel und von entgegengesetzter Richtung, so ist die Summe der beiden Winkel gleich zwei Rechten.

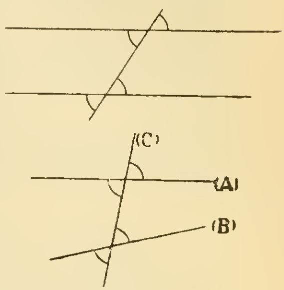


Fig. 21.

139. Das Verfahren, Parallellinien zu ziehen, beruht bekanntlich darauf, daß, während eine Seite des Winkelhakens längs eines fest aufgelegten Lineals sich verschiebt, die andere Seite einer fest gegebenen Richtung parallel bleibt. Inwiefern der obige Satz dieses Verfahren, zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt eine Parallele zu legen, rechtfertigt, will ich hier nicht ausdrücklich erörtern; es sei nur bemerkt, daß die Eigenschaft, die in demselben formuliert wird, sich nicht nur auf die Seiten des Winkelhakens bezieht, sondern überhaupt auf jede Gerade, die auf diesen Winkelhaken gezeichnet und von seiner Bewegung mit fortgenommen wird. Bei dieser Bewegung beschreibt jeder Punkt des Winkelhakens eine Parallele zu der Geraden, auf der der Winkelhaken sich verschiebt. Alle Punkte des Winkelhakens beschreiben, indem sie so von einer Stelle zur andern rücken, Stücke von parallelen Geraden, welche gleiche Richtung und gleiche Länge haben, d. h. äquipollente Vektoren (Nr. 82). Man sagt dann, der Winkelhaken habe eine Verschiebung erlitten, die einem beliebigen der von den verschiedenen Punkten beschriebenen Vektoren gleich ist. Endlich ist es klar, daß diese Eigenschaften nicht notwendig mit der dreieckigen Form des Winkelhakens zusammenhängen und daß sie bestehen bleiben für irgendeine beliebige Figur, in der eine Gerade sich auf einer festen Geraden verschieben würde.

140. Es genügt, daran zu erinnern, daß ein *Parallelogramm* ein

Viereck ist, dessen gegenüberliegende Seiten parallel sind; die gegenüberliegenden Seiten sind gleich; zwei gegenüberliegende Winkel sind gleich; die Summe zweier Winkel, deren Scheitel auf einer Seite liegen, ist gleich zwei Rechten. Eine Diagonale teilt das Parallelogramm in zwei gleiche Dreiecke; die beiden Diagonalen halbieren sich gegenseitig in einem Punkte, welcher der Mittelpunkt des Paralellogramms ist. Das *Rechteck* ist ein Parallelogramm mit vier rechten Winkeln; in einem Rechteck sind die Diagonalen gleich. Das Quadrat ist ein Rechteck, dessen Seiten gleich sind. Die Diagonalen stehen aufeinander senkrecht.

141. Es ist sicher nicht notwendig, hier auf die Definition des Kreises, die Grundeigenschaften der Sehnen und Durchmesser zurückzukommen; ich habe in Nr. 55, 56, 57, bei Gelegenheit der Messung von Größen, einige Worte sagen können über die Proportionalität der Mittelpunktwinkel und der zwischenliegenden Kreisbogen, über die Berechnung der Winkel oder der Bogen, sowohl in Grade, Minuten und Sekunden als in Zentesimalgrade.

Ich lasse auch, ungeachtet ihrer Wichtigkeit, die Sätze über das Maß der Peripheriewinkel beiseite, mit Ausnahme eines besonderen Falles, den wir bei Gelegenheit leicht direkt studieren können.

142. Betrachten wir ein bei A rechtwinkliges Dreieck BAC. Man kann es natürlich als die Hälfte eines Rechteckes $A'BAC$ ansehen, das man konstruiert, indem man durch die Punkte B und C die Parallelen BA' und CA' zu den Seiten AC, AB legt. Die Diagonalen BC und AA' dieses Rechteckes schneiden sich in ihrer Mitte M. Da diese Diagonalen gleich sind, sind es ihre Hälften auch: die Linien MB, MA, MC sind also gleich. Daraus folgt, daß der Kreis, der von dem Punkt M als Mittelpunkt mit dem Radius MB beschrieben wird, durch den Punkt A geht. Und so geht also der Kreis, den man auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks als Durchmesser beschreibt, durch den Scheitel des rechten Winkels dieses Dreiecks.

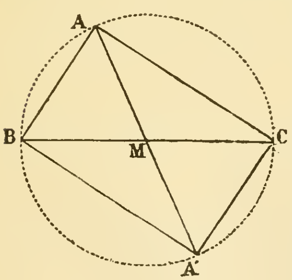


Fig. 22.

Und umgekehrt, hat man einen Kreis, dessen Mittelpunkt M ist, einen Durchmesser BC dieses Kreises, einen Winkel BAC, dessen Scheitel A auf der Kreislinie liegt und dessen Schenkel AB, AC durch die Endpunkte des Durchmessers gehen, so ist dieser Winkel (den man als in einen Halbkreis eingeschrieben bezeichnet) ein rechter Winkel. Denn wenn man vom Punkt C ein Lot CA_1 auf BA fällt, so fällt der Punkt A_1 mit dem Punkt A zusammen; gemäß dem eben bewiesenen Satze nämlich muß der auf BC als Durchmesser beschriebene Kreis durch den Punkt A_1 gehen; nun geht er aber schon durch den Punkt A, und die Gerade BA kann ihn außer in dem Punkte B nur in einem Punkt treffen: folglich fällt der Punkt A_1 mit dem Punkt A zusammen.

Also ist jeder Winkel, dessen Scheitel sich auf der Kreislinie befindet und dessen Schenkel durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, ein rechter Winkel.

143. Man bezeichnet zwei Dreiecke als *ähnlich*, wenn man ihre Elemente einander so zuordnen kann, daß die zugeordneten Winkel gleich und die drei Seiten des einen proportional den drei ihnen zugeordneten Seiten des andern sind. Sind zwei Dreiecke ähnlich, so ist es der Bequemlichkeit wegen angebracht, die Symbole, welche diese beiden Dreiecke bezeichnen, untereinander zu schreiben (Nr. 136), und zwar so, daß die einander zugeordneten Elemente genügend hervorgehoben sind. Spreche ich also von zwei ähnlichen Dreiecken

$$\begin{matrix} ABC \\ DEF, \end{matrix}$$

so verstehe ich das so, daß die Spitzen A und D, B und E, C und F, die untereinander stehen, zugeordnet sind; desgleichen die Seiten AB und DE, AC und DF, BC und EF: die Winkel A und D sind gleich, ebenso die Winkel B und E oder C und F. Außerdem herrscht Gleichheit der Verhältnisse

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Bei diesen Verhältnissen kann man die Glieder AB, DE, AC, ... als *Zahlen* ansehen, welche die Längen der durch dieselben Symbole*) AB, DE, AC, ... bezeichneten Strecken messen.

Der Begriff der ähnlichen Dreiecke führt zu folgenden Lehrsätzen:

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn man zwischen ihnen eine solche Zuordnung aufstellen kann, daß zwei Winkel des einen den beiden ihnen zugeordneten Winkeln des andern gleich sind, oder daß ein Winkel des einen dem ihm zugeordneten Winkel des andern gleich ist und die Seiten des ersten Dreiecks, die diesen Winkel einschließen, den ihnen zugeordneten Seiten des andern proportional sind, oder end-

*) Siehe die Anmerkung zu Nr. 83.

lich, daß die drei Seiten eines der Dreiecke den ihnen zugeordneten Seiten des andern proportional sind.

144. Die Beweisführung dieser Sätze beruht auf folgendem Lehrsatz: es sei ein Dreieck ABC gegeben; legt man zu einer der Seiten BC eine Parallele $B'C'$, welche in B' und C' die Seiten AB, AC schneidet, so sind die beiden Dreiecke $\begin{matrix}AB\,C\\AB'C'\end{matrix}$ ähnlich. Denn der Winkel A ist derselbe in beiden Dreiecken; die Winkel B und B', die Winkel C und C' sind gleich gemäß den Sätzen in Nr. 138; die Gleichheit der Verhältnisse $\frac{AB'}{AB}$, $\frac{AC'}{AC}$ läßt sich beweisen wie der Satz in Nr. 54, von dem sie eigentlich nur ein besonderer Fall ist; um endlich zu beweisen, daß ein jedes dieser Verhältnisse gleich $\frac{B'C'}{BC}$ ist, genügt es, die Parallele $C'D$ zu AB zu legen; gemäß demselben Satze hat man $\frac{BD}{BC}=\frac{AC'}{AC}$; nun ist aber die Figur $BDC'B'$ offenbar ein Parallelogramm, in welchem die einander gegenüberliegenden Seiten BD, $B'C'$ gleich sind; der Satz ist also vollständig bewiesen.

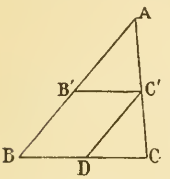


Fig. 23.

Dieses vorausgesetzt, lassen sich die oben formulierten Lehrsätze auf eine ähnliche Art beweisen.

Es seien $\begin{matrix}ABC\\A'B'C'\end{matrix}$ die beiden Dreiecke, deren Ähnlichkeit zu beweisen ist: ein jeder der Lehrsätze setzt eine Zuordnung der beiden Dreiecke voraus, welche durch die vorhergehende Schreibweise angedeutet wird: auf der Seite AB, die $A'B'$ entspricht, nimmt man, vom Punkt A aus, eine Länge AB'', die gleich $A'B'$ ist, und legt zu BC die Parallele $B''C''$; die beiden Dreiecke $\begin{matrix}AB''C''\\AB\;\;C\end{matrix}$ sind dann gemäß dem vorhergehenden Lehrsatz ähnlich, und es genügt, die Kongruenz der Dreiecke $\begin{matrix}AB''C''\\A'B'C'\end{matrix}$ zu beweisen, was, in jedem besonderen Falle, sich leicht auf den Beweis zurückführen läßt, daß wir es mit einem klassischen Fall der Kongruenz zweier Dreiecke zu tun haben (Nr. 136).

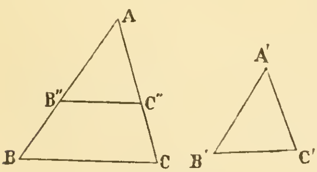


Fig. 24.

145. Ich wende nun diese Sätze auf die Figur an, die durch ein in A rechtwinkliges Dreieck BAC und die Höhe AD dieses Dreiecks gebildet wird; die drei rechtwinkligen Dreiecke

$$BAC$$
$$BDA$$
$$ADC$$

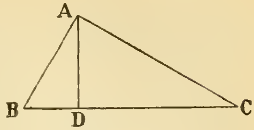


Fig. 25.

sind ähnlich; die zwei ersten z. B., weil die respektiven Winkel, deren Scheitel A und D sind, rechte Winkel sind und die Winkel in B dieselben sind. Daraus gehen folgende Gleichheiten der Verhältnisse hervor:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BA} = \frac{AC}{DA}, \quad \frac{BA}{AD} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}, \quad \frac{BD}{AD} = \frac{BA}{AC} = \frac{DA}{DC}.$$

Nun aber ziehen die Gleichheiten

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BA}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}, \quad \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC},$$

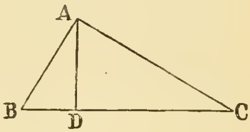


Fig. 26.

als numerische Gleichheiten betrachtet, folgende Gleichheiten nach sich:

$$BA^2 = BD \cdot BC, \quad AC^2 = CD \cdot CB,$$
$$AD^2 = BD \cdot DC.$$

Addiert man die beiden ersten Gleichheiten Seite mit Seite, so erhält man:

$$BA^2 + AC^2 = BD \cdot BC + CD \cdot BC = (BD + CD) \cdot BC = BC^2.$$

Man hat damit folgende Sätze bewiesen:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Zahl, welche einen Schenkel des rechten Winkels mißt, gleich dem Produkt der Zahl, welche die Hypotenuse mißt mit der Zahl, welche das durch die Höhe des Dreiecks auf der Hypotenuse abgetrennte (und an den betreffenden Schenkel des rechten Winkels anliegende) Segment mißt. Das Quadrat der Zahl, welche die Höhe mißt, ist gleich dem Produkt der Zahlen, welche die von der Höhe auf der Hypotenuse bestimmten Segmente messen. Das Quadrat der Zahl, welche die Hypotenuse mißt, ist gleich der Summe der Quadrate der Zahlen, welche die Schenkel des rechten Winkels messen.

Und umgekehrt: hat man in einem Dreieck AOB

$$AB^2 = OA^2 + OB^2,$$

so kann man behaupten, daß dieses Dreieck in O rechtwinkelig ist; denn betrachtet man zwei sich in O' schneidende, rechtwinkelige Geraden und nimmt man auf diesen beiden Geraden Längen $O'A'$, $O'B'$, die OA resp. OB gleich sind, so hat man in dem rechtwinkligen Dreieck $A'O'B'$, $A'B'^2 = O'A'^2 + O'B'^2$, und folglich $A'B' = AB$, und die beiden Dreiecke AOB, $A'O'B'$ sind gleich, weil ihre einander zugeordneten Seiten gleich sind. Das erste ist also in O rechtwinklig.

146. Diese wichtigen Eigenschaften des rechtwinkeligen Dreiecks geben vorerst zu einer Bemerkung von wesentlicher Bedeutung Anlaß. Betrachten wir z. B. die Beziehung

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 \text{ oder } a^2 = b^2 + c^2,$$

indem wir, gemäß einer sehr üblichen Bezeichnungsweise, die Länge einer jeden Seite des Dreiecks durch den dem Buchstaben der gegenüberliegenden Spitze entsprechenden kleinen Buchstaben darstellen. Gemäß dem Beweis ist diese Beziehung gültig für eine beliebige Längeneinheit, mit der man die Seiten BC, BA, AC mißt. Das sieht man an der Beziehung selbst, deren zwei Glieder *homogene* Polynome zweiten Grades in a, b, c sind (Nr. 119). Mißt man die Längen BC, BA, AC mit einer gewissen Einheit U und findet man dann die Zahlen a, b, c; mißt man sie wieder mit einer neuen Einheit U' und findet man die Zahlen a', b', c', so sind diese Zahlen proportional mit den Zahlen a, b, c (Nr. 52), und man hat

$$a' = ka, \; b' = kb, \; c' = kc,$$

indem man durch k den Proportionalitätskoeffizienten bezeichnet oder die Zahl, welche die alte Einheit U für U' als Einheit mißt (Nr. 34). Hat man $a^2 = b^2 + c^2$, so ist auch $(ka)^2 = (kb)^2 + (kc)^2$, oder $a'^2 = b'^2 + c'^2$. Allgemein gesprochen, hat man ein homogenes Polynom in $a, b, c, \ldots$ vom Grade n und ersetzt man in demselben $a, b, c, \ldots$ durch $ka, kb, kc, \ldots$, so wird jedes Monom desselben und folglich auch das ganze Polynom mit k^n multipliziert. Hat man also eine Gleichung $a, b, c, \ldots$, deren beide Glieder homogene Polynome in $a, b, c, \ldots$ vom selben Grade sind, so ist diese Gleichung, die angenommenermaßen für $a, b, c, \ldots$ richtig ist, auch noch richtig, wenn man $a, b, c, \ldots$ durch $ka, kb, kc, \ldots$ ersetzt, wobei k eine beliebige Zahl bedeutet.

Die Beziehungen zwischen den Längen der Linien einer Figur, die die Geometrie uns lehrt, werden immer durch homogene Beziehungen ausgedrückt, wenn die Längeneinheit nicht spezifiziert ist, eben weil sie bestehen bleiben, wenn man diese Einheit ändert. Diese Gleichartigkeit kann aber verschwinden, wenn man die Einheit oder die Zahl, welche die Länge irgendeiner Linie der Figur mißt, spezifiziert. Nimmt man z. B. das Meter als Einheit und sagt man, die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks sei gleich 2 Meter, so kann man behaupten, daß für die beiden Längen der andern Seiten b, c die Beziehung $b^2 + c^2 = 4$ richtig ist; diese Beziehung ist nicht homogen, da das zweite Glied kein homogenes Polynom vom zweiten Grade ist.

Übrigens hat sich nicht die Geometrie allein mit dem Prinzip der Gleichartigkeit und dem dafür angegebenen Grunde zu beschäftigen. Es liegt ein allgemeines Prinzip vor, über das ich keine weiteren Erörterungen anstellen will.

147. Die in Nr. 145 aufgestellten Eigenschaften des rechtwinkeligen Dreiecks dienen als Basis zu einigen wichtigen Konstruktionen, worüber ich ein Wort zu sagen habe; und zwar will ich zuerst von der mittleren Proportionalen reden.

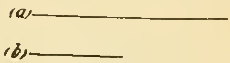


Fig. 27.

Sind zwei Strecken (a) und (b) gegeben, so soll eine Strecke konstruiert werden, deren Länge x mit den Längen a, b der beiden gegebenen Strecken durch die Beziehung*) $x^2 = ab$ verbunden sein soll. Man kann dann eine der folgenden Konstruktionen anwenden:

1. Tragen wir auf ein und dieselbe Gerade in AB, BC, die beiden Strecken (a), (b) eine nach der anderen auf, und konstruieren wir einen Halbkreis mit AC als Durchmesser. Es genügt, zu diesem Zwecke die Mitte M der beiden Punkte A, C zu bestimmen, was sich mit Hilfe des Lineals und des Zirkels leicht machen läßt: M ist dann der Mittelpunkt und MA der Radius des Kreises, den man konstruieren kann; errichten wir im Punkte B eine Senkrechte zu AC, die man mit Hilfe derselben Instrumente konstruiert; es sei D der Punkt, wo diese Senkrechte den Halbkreis schneidet: so ist BD die gesuchte Strecke, da der Winkel ADC ein rechter ist (Nr. 142) und $BD^2 = AB \times BC$ ist.

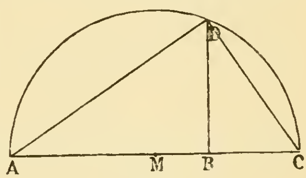


Fig. 28.

2. Anstatt die beiden Strecken (a), (b) eine nach der anderen aufzutragen, kann man sie auch auf ein und dieselbe Gerade miteinander von demselben Punkte O aus auftragen, in OA, OB; es genügt dann, auf dem größten dieser Segmente OA einen Halbkreis zu beschreiben, in B eine Senkrechte BI auf OA zu errichten und sie bis zur Kreislinie zu verlängern; die Linie OI ist die gesuchte Linie, denn das Dreieck OIA ist in I rechtwinkelig, und man hat $OI^2 = OB \times OA$.

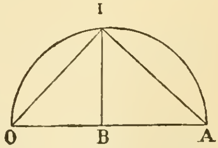


Fig. 29.

*) Diese Beziehung ist in bezug auf x, a, b homogen: wenn sie in dem Falle stattfindet, wo die Strecken mit einer gewissen Einheit gemessen werden, wird sie auch gelten, einerlei mit welcher Einheit man dieselben mißt.

Diese Konstruktion gestattet uns, auf geometrischem Wege die *Quadratwurzel* einer positiven Zahl n zu finden, das heißt: Die Zahl, deren Quadrat gleich n ist. Nehmen wir zwei Zahlen a, b, deren Produkt gleich n ist (1 und n zum Beispiel); wählen wir eine Längeneinheit und konstruieren wir zwei Segmente (a), (b), die, wenn wir diese Einheit annehmen, als Maße die Zahlen a, resp. b haben: sind dies ganze Zahlen oder Bruchzahlen, so kommt die Konstruktion dieser Segmente darauf hinaus, Einheiten oder Teile der Einheit zu addieren; man weiß, wie das geschieht (Anmerkung zu Nr. 54). Es bleibt nur noch übrig, die mittlere Proportionale zwischen diesen beiden Segmenten zu konstruieren; die Zahl, welche diese mittlere Proportionale mit der gewählten Einheit mißt, ist die gesuchte Quadratwurzel. Die geometrische Konstruktion und die Messung der konstruierten Linie mit einem eingeteilten Lineal gestatten uns so, die Quadratwurzel ziemlich genau zu berechnen.

Ich erinnere daran, daß die Quadratwurzel der Zahl n, welch letztere positiv oder O sein kann, durch $\sqrt{n}$ *) bezeichnet wird.

148. Es bietet keine Schwierigkeit, ein rechtwinkeliges Dreieck zu konstruieren, von dem man zwei Seiten kennt. Man hat diese Konstruktion schon in Nr. 145 für den Fall erklärt, wo die beiden gegebenen Seiten (b) und (c) die Schenkel des rechten Winkels sind. Wählt man eine Längeneinheit und bezeichnet man durch b, c die Zahlen, welche die Strecken (b), (c) messen, durch a die Zahl welche die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks mißt, so hat man $a^2 = b^2 + c^2$ oder $a = \sqrt{b^2 + c^2}$. Umgekehrt, sind b und c gegebene Zahlen, so kann man, nachdem man eine Längeneinheit gewählt, diesen Zahlen Strecken (b), (c) zuordnen, mit der gewählten Einheit die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks, welches als Schenkel des rechten Winkels die Strecken (b), (c) hat, messen und so, mit der Genauigkeit, welche Konstruktionen und Messungen zulassen, die Zahl $\sqrt{b^2 + c^2}$ erhalten.

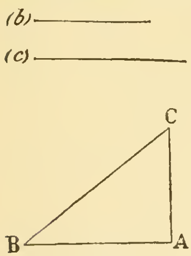


Fig. 30.

Nehmen wir nun an, daß man die Hypotenuse (a) oder BC des rechtwinkeligen Dreiecks und eine seiner Seiten (b) kennt. Auf BC als Durchmesser beschreibt man einen Halbkreis; vom Punkte C als Mittelpunkt aus und mit (b) als Radius, beschreibt man dann einen Kreisbogen, der in A den Halbkreis schneidet; das Dreieck BAC ist

*) Eine negative Zahl hat keine *Quadratwurzel* (Nr. 120), da das Quadrat einer positiven oder negativen Zahl immer positiv ist.

dann rechtwinkelig; (a) ist dessen Hypotenuse, (b) ein Schenkel seines rechten Winkels. Wählt man eine Längeneinheit und bezeichnet man durch a, b, c die Zahlen, welche seine Seiten messen, so hat man $c^2 = a^2 - b^2$ oder

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

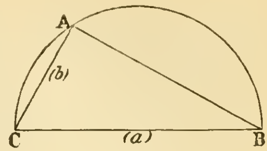


Fig. 31.

Es ist klar, daß es ebensoleicht ist, ein rechtwinkeliges Dreieck zu konstruieren, wenn man einen spitzen Winkel und eine Seite, z. B. die Hypotenuse, kennt.

149. Exkurs über Trigonometrie. Nehmen wir an, daß in dem Dreieck BAC, das in A rechtwinkelig ist, die Hypotenuse BC gleich der Längeneinheit sei. Ist der Winkel B gegeben, so ist das Dreieck augenscheinlich bestimmt: angenommen z. B., der Winkel B sei in Graden ausgedrückt und man bezeichne durch denselben Buchstaben B die Zahl, welche diesen Winkel mißt; tut man dasselbe mit dem Winkel C, so hat man $C = 90 - B$. Man kann dann die Seiten AB, AC messen. Jedem Wert von B entspricht eine bestimmte Zahl für jede dieser Seiten. Stellen wir uns vor, man habe diese Operation für die dem Winkel B gegebenen Werte 1^0, 2^0, 3^0, ... 89^0 vorgenommen und habe eine Tabelle mit den entsprechenden Werten der Seiten AB, AC aufgestellt, so leuchtet die Nützlichkeit einer solchen Tabelle direkt ein. Betrachtet man ein beliebiges rechtwinkeliges Dreieck $B'A'C'$, bei dem man einerseits die Länge der Hypotenuse $B'C'$, andererseits den Wert eines seiner spitzen Winkel, B' z. B., in Graden ausgedrückt, kennt, so kann man mit Hilfe der betreffenden Tabelle die anderen Seiten berechnen.

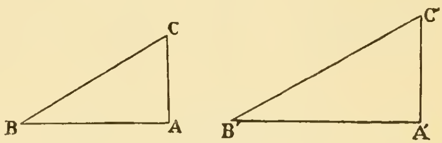


Fig. 32.

Denn die beiden Dreiecke $A'B'C'$, ABC sind ähnlich; ihre Seiten sind proportional; der Koeffizient, mit dem man die Seiten des zweiten multiplizieren muß, um die Seiten des ersten zu erhalten, ist gleich $B'C'$, da ja BC gleich 1 ist.

Um die Seiten $A'B'$, $A'C'$ zu erhalten, genügt es also, die Zahlen AB und AC, die in der Tabelle sind, mit der Zahl $B'C'$ zu multiplizieren.

Man hat nun zwar angenommen, daß der Winkel B' eine ganze Zahl von Graden habe; man begreift jedoch, daß man eine viel ausgedehntere Tabelle konstruieren kann, in die die aufeinanderfolgenden

Werte des Winkels B des Dreiecks BAC, z. B. nach Sechzigstel von Graden, oder Minuten, oder selbst nach Sekunden eingetragen sind. Es ist kaum nötig zu bemerken, daß eine solche Konstruktion sich nicht mit auf Papier vorgenommenen Messungen machen läßt; man hat zu ganz anderen Verfahren greifen müssen, um sie zu realisieren.

Um den Kosinus und den Sinus eines spitzen Winkels zu definieren, betrachten wir ein rechtwinkeliges Dreieck, in dem dieser Winkel als spitzer Winkel figuriert und dessen Hypotenuse der Längeneinheit gleich ist: die Länge der an diesem Winkel anliegenden Kathete ist dessen *Kosinus*, die Länge der Gegenkathete dessen *Sinus*. Man bezeichnet den Kosinus und den Sinus eines Winkels, indem man vor den Namen des Winkels oder die Zahl, die ihn mißt, die Zeichen cos und sin setzt, die dann Kosinus und Sinus ausgesprochen werden.

So hat man im Dreieck BAC, das in A rechtwinkelig ist und dessen Hypotenuse BC der Längeneinheit gleich ist,

$$BC = \cos B, \qquad AC = \sin B;$$

desgleichen

$$AC = \cos C, \qquad AB = \sin C,$$

und folglich

$$\cos C = \sin B, \qquad \sin C = \cos B;$$

daraus geht hervor, unabhängig vom Wert des spitzen Winkels B,

$$\sin(90^0 - B) = \cos B, \qquad \cos(90^0 - B) = \sin B.$$

Die Beziehung $AB^2 + AC^2 = BC^2$ zeigt, daß unabhängig vom Werte des spitzen Winkels B

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1.$$

Tangente eines Winkels nennt man das Verhältnis seines Sinus zu seinem Kosinus: man stellt die Tangente eines Winkels dar, indem man vor den Namen oder das Maß dieses Winkels das Symbol tg oder tang setzt, das man Tangente ausspricht; man hat auf diese Weise

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B},$$

$$\operatorname{tg}(90^0 - B) = \frac{\sin(90^0 - B)}{\cos(90^0 - B)} = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{1}{\operatorname{tg} B}.$$

Man hat numerische Tabellen konstruiert, in die die Werte des Winkels in äußerst geringen Abständen eingetragen sind, und welche die entsprechenden Werte des Sinus, des Kosinus und der Tangente geben. Diese Tabellen heißen Tabellen der *natürlichen Werte* (des Kosinus, des Sinus, der Tangente).

Ich habe vorhin angenommen, die Winkel seien in Graden berechnet; man sieht direkt, daß man sie ebensogut nach der Dezimaleinteilung einteilen kann. Für beide Arten der Einteilung gibt es Tabellen.

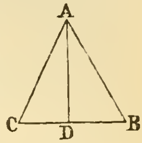


Fig. 33.

In einem beliebigen rechtwinkeligen Dreieck erhält man die Länge eines Schenkels des rechten Winkels, indem man den Kosinus des anliegenden Winkels oder den Sinus des diesem Schenkel gegenüberliegenden Winkels mit der Länge der Hypotenuse multipliziert. Das Verhältnis der beiden Schenkel des rechten Winkels ist gleich der Tangente des Winkels, welcher dem im Zähler stehenden Schenkel gegenüberliegt.

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Man pflegt durch die großen Buchstaben A, B, C die Winkel dieses Dreiecks, und durch die entsprechenden kleinen Buchstaben a, b, c die gegenüberliegenden Seiten zu bezeichnen.

Ich nehme zuerst an, die beiden Winkel B und C seien spitze Winkel. Der Fußpunkt D der Höhe wird also zwischen die beiden Spitzen B, C fallen. In den beiden Dreiecken ACD, ABD, welche in D rechtwinkelig sind, hat man

$$AD = AC \sin C, \qquad AD = AB \sin B,$$
$$CD = AC \cos C, \qquad BD = AB \cos B.$$

Übrigens ist $CB = CD + DB$. Daraus schließt man

$$b \sin C = c \sin B;$$
$$a = b \cos C + c \cos B.$$

Wäre der Winkel C stumpf (Fig. 34), so müßte man diese beiden Gleichheiten durch folgende ersetzen:

$$b \sin C' = c \sin \mathrm{B},$$
$$a = c \cos B - b \cos C',$$

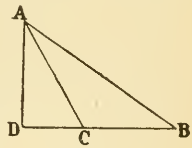


Fig. 34.

in denen C' den Winkel DCA bezeichnet, welcher der Supplementwinkel des Winkels C im Dreieck ABC ist.

Man sieht diese Formeln als in den vorhergehenden enthalten an, indem man folgende Konvention annimmt, die berechtigt ist, weil man von den Sinus und den Kosinus eines stumpfen Winkels noch nicht definiert hat:

Der Sinus eines stumpfen Winkels ist gleich dem Sinus des spitzen, der sein Supplementwinkel ist.

Der Kosinus eines stumpfen Winkels ist der symmetrische Wert des Kosinus des spitzen, der sein Supplementwinkel ist.

Mit Hilfe dieser Konvention und einer der Sinus- oder Kosinustabellen, von denen ich gesprochen habe, kann man den Sinus und den Kosinus eines Winkels zwischen 0^0 und 180^0 finden.

Dann hat man natürlich in jedem Dreieck $b \sin C = c \sin B$ oder

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

In Wahrheit hat man die Gleichheit dieser beiden letzten Verhältnisse beweisen. Aber der Beweis für die Gleichheit der beiden ersten ist natürlich derselbe.

Man hat auch

$$a = b \cos C + c \cos B,$$

$$b = c \cos A + a \cos C,$$

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

Ersetzt man in der ersten Gleichheit $\cos B$ und $\cos C$ durch ihre aus den beiden letzten hervorgehenden Werte, so findet man die Beziehung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Diese Beziehungen genügen dazu, uns eine Idee zu geben von der wesentlichen Rolle, welche die trigonometrischen Linien beim Studium des Dreiecks spielen.

150. Nimmt man als Flächeneinheit das mit der Längeneinheit konstruierte Quadrat, z. B. das Quadratmeter in Übereinstimmung mit dem Meter als Längeneinheit, so wird die Fläche eines Rechtecks gemessen durch das Produkt der beiden Zahlen, welche die beiden von einer und derselben Spitze ausgehenden Seiten messen.

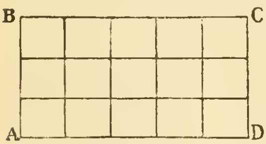


Fig. 35.

Der Satz ist fast evident nach der Figur, wenn die Zahlen, welche die Seiten des Rechtecks messen, ganze Zahlen sind. Nehmen wir z. B. an, die Seite AB enthalte drei Längeneinheiten und die Seite AD enthalte deren fünf: legt man durch die Einteilungspunkte von AB Parallelen zu AD, so zerlegt man das Rechteck in drei gleiche Rechtecke, bei denen eine Seite gleich AD und die andere gleich der Längeneinheit ist; legt man nun durch die Einteilungspunkte von AD Parallelen zu AB, so teilt man ein jedes dieser Rechtecke in fünf Quadrate, deren Seite die Längeneinheit ist: mithin enthält das Rechteck $ABCD$ 3 mal 5 mit der Längeneinheit konstruierte Quadrate: Der Satz ist also in diesem Falle bewiesen*). Der Beweis kann natürlich auf den Fall angewendet werden, wo das in Frage stehende Rechteck ein Quadrat ist: so würde ein Quadrat, dessen Seite sieben Längeneinheiten enthielte, selbst $7 \cdot 7$ oder 7^2 mit dieser Einheit konstruierte Quadrate enthalten.

Nehmen wir jetzt an, die Zahlen, welche die Seiten des Rechteckes messen, seien Bruchzahlen; man kann annehmen, sie seien auf denselben Nenner gebracht; seien z. B. die Zahlen $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$ die Maße der Seiten AB, AD.

Betrachten wir das mit der Längeneinheit konstruierte Quadrat und teilen wir dessen Seiten in sieben gleiche Teile ein. Mit einem dieser Teile konstruieren wir dann ein Quadrat: aus dem vorhergehenden Beweis geht hervor, daß das mit der Längeneinheit konstruierte Quadrat $7 \cdot 7$ dieser kleinen Quadrate enthält. Dieses angenommen, teilen wir AB in drei gleiche Teile, AD in fünf gleiche Teile: jeder dieser Teile ist $^1/_7$ der Längeneinheit, und der vorhergehende Beweis zeigt uns, daß das Rechteck $ABCD$ 3 mal 5 mit dem Siebentel der Längeneinheit konstruierte Quadrate enthält. Da dieses letzte Quadrat $5 \cdot 3$ mal im Rechteck und $7 \cdot 7$ mal in dem mit der Längeneinheit konstruierten Quadrate enthalten ist, ist das Verhältnis der Oberfläche des Rechtecks zur Oberfläche des Quadrats oder die Zahl, welche das Maß der ersten ist, mit der zweiten als Einheit, gleich $\frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 7} = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{7}$; was zu beweisen war.

Aus diesen Sätzen gehen, wie man bemerken möge, die Regeln hervor, welche man bei der Auseinandersetzung des metrischen Systems für das Lesen der die Oberflächen messenden Dezimalzahlen aufstellt. Nehmen wir z. B. an, man wähle das Meter als Längeneinheit und das Quadratmeter als Flächeneinheit; da das Meter 10 dm enthält, enthält das Quadratmeter $10 \cdot 10$ oder 100 qdm: das Quadratdezimeter ist der hundertste Teil des Quadratmeters; desgleichen ist das Quadratzentimeter der hundertste Teil des Quadratdezimeters; das Quadratmillimeter der hundertste Teil des Quadratzentimeters. Um eine Dezimalzahl, die eine Fläche ausdrückt, zu lesen, richtet man es also so ein, daß die Anzahl Ziffern eine gerade sei, indem man, wenn notwendig, eine Null hinter den dezimalen Teil setzt; man zerlegt sie dann

*) Es ist nicht unnötig, zu bemerken, daß man ebenso beweisen könnte, es enthalte 5 mal 3 mit der Längeneinheit konstruierte Quadrate, und daß folglich das Produkt 3 mal 5 gleich ist 5 mal 3: es ist das ein geometrischer Beweis folgenden Satzes: in einem Produkt zweier Faktoren kann man die Reihenfolge der beiden Faktoren umstellen.

vom Komma aus in Abteilungen von je zwei Ziffern, liest dann den ganzen Teil, indem man *Quadratmeter* hinzufügt, dann die erste Abteilung von je zwei Ziffern mit hinzugefügtem *Quadratdezimeter*, dann die zweite mit *Quadratzentimeter*, endlich die dritte mit *Quadratmillimeter*. So wird z. B. die Zahl 3,7103, wenn sie eine in Quadratmetern berechnete Fläche darstellt, folgendermaßen gelesen: 3 Quadratmeter, 71 Quadratdezimeter, 3 Quadratzentimeter. Nähme man als Einheit das Quadratdezimeter, so hätte dieselbe Fläche als Maß die Zahl 371,03, die übrigens geradeso ausgesprochen würde. Die Fläche eines Rechtecks, dessen Basis = 1 m und dessen Höhe = 1 dm ist, d. h. dessen Seiten, mit dem Meter als Einheit, durch die Zahlen 1 und 0,1 gemessen werden, hat als Maß die Zahl $1 \times 0{,}1 = 0{,}1$, was ausgesprochen wird: zehn Quadratdezimeter; es ist der zehnte Teil des Quadratmeters.

151. Sind zwei Vielecke so aneinandergelegt, daß ihre Umfangslinien sich zum Teil decken und kein Punkt im Innern des einen auch im Innern des andern liegt, wie z. B. die beiden Vielecke (P), (Q), deren Umfangslinien in AB sich decken, so sieht man das durch Streichen der Trennungslinie entstandene Vieleck (S) als die Summe der beiden Vielecke (P), (Q) an. Umgekehrt sieht man das eine dieser letzten Vielecke als die Differenz zwischen dem Vieleck (S) und dem andern an.

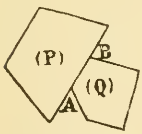


Fig. 36.

Kann man eine Fläche (S) als die Summe oder Differenz von meßbaren Flächen ansehen, so sieht man das Maß dieser Fläche (S) als die Summe oder die Differenz der Zahlen an, welche diese Flächen, deren Summe oder Differenz (S) ist, messen; desgleichen, ist (S) die Hälfte, das Viertel, ... einer meßbaren Fläche, so sieht man das Maß von (S) als die Hälfte, das Drittel, das Viertel ... dieser letzten Fläche an. Diese Sätze, deren Richtigkeit niemand in Frage stellt, sind jedoch nicht von selbst einleuchtend; und man muß zugeben, daß das Wort *Maß* darin nicht immer in der Bedeutung gebraucht wird, die ihm in Nr. 15 und Nr. 20 gegeben wurde, nämlich der Bruch, dessen Nenner und Zähler ausdrücken, wie oft eine und dieselbe Größe, und zwar das gemeinsame Maß der zu messenden Größe und der Einheit in beiden enthalten ist. Das Wort Maß behält die eben angegebene Bedeutung, wenn es sich um ein Rechteck handelt, dessen Seiten mit der Längeneinheit meßbar sind, wie die eben gegebene Beweisführung gezeigt hat; dies wird jedoch, wie wir bald sehen werden, bei der Messung eines Dreiecks nicht mehr der Fall sein: dort wird von einem gemeinsamen Maß dieses Dreiecks und des mit der Längeneinheit konstruierten Quadrates nicht mehr die Rede sein. Übrigens will ich nur auf diese Schwierigkeiten kurz hinzeigen: im 8. Kapitel werde ich auf den Begriff von Maß einer Fläche zurückkommen. Für den Augenblick genügt es, darauf aufmerksam zu machen, daß die eben berührten Sätze genau stimmen mit dem mehr oder weniger dunkeln Begriff, den man sich von der Berechnung einer Fläche macht.

152. Gemäß dem eben Gesagten bezeichnet man als *äquivalent* (als durch dieselbe Zahl gemessen) zwei Flächen, welche die Summen oder resp. die Differenzen von gleichen (sich gegenseitig deckenden) Flächen sind; zwei Flächen, welche die Hälften, die Drittel, die Viertel, . . . von äquivalenten Flächen sind, sind auch äquivalent. Diese Begriffe einmal angenommen, ist es leicht, vorausgesetzt natürlich, daß man als Flächeneinheit das mit der Längeneinheit konstruierte Quadrat nehme, die Flächen eines Parallelogramms, eines Dreiecks, überhaupt irgendeines Vielecks auszudrücken. Betrachtet man z. B. das Parallelogramm $ABCD$ und führt man durch die Spitzen A, D die Senkrechten AA', DD' auf die Seite BC, so beweist die Gleichheit der rechtwinkligen Dreiecke $\frac{AA'B}{DD'C}$ die Äquivalenz der Flächen $ABCD$, $AA'D'D$, von denen die zweite ein Rechteck ist: daraus schließt man, daß die Zahl, welche die Fläche eines Parallelogramms mißt, gleich ist dem Produkt der Zahl, welche eine seiner Seiten mißt mit der Zahl, welche seine Höhe mißt.

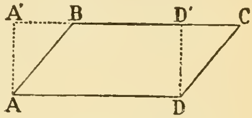


Fig. 37.

Da das Dreieck ABC als die Hälfte des Parallelogramms $BADC$ angesehen werden kann, so sieht man, daß die Zahl, welche die Fläche eines Dreiecks mißt, gleich ist der Hälfte des Produkts der Zahl, welche dessen Basis mißt, mit der Zahl, welche dessen Höhe mißt.

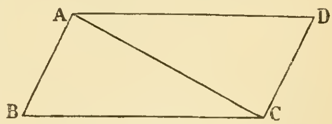


Fig. 38.

Da endlich jedes beliebige Vieleck als die Summe einer gewissen Anzahl Dreiecke angesehen werden kann, sieht man, daß man den Flächeninhalt eines beliebigen Vielecks berechnen kann.

Das Verhältnis*) der Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke

*) Dieses Wort bedeutet hier den (genauen) Quotienten der Zahlen, welche die Flächen der beiden Dreiecke in bezug auf dieselbe Flächeneinheit messen. Obschon die Beweisführung aus Nr. 41 sich nicht direkt auf diesen Fall an-

ist gleich dem Quadrat des Verhältnisses der sich gegenseitig entsprechenden Seiten dieser beiden Dreiecke.

Der Beweis dafür geht leicht aus der oben für die Messung eines Dreiecks angegebenen Regel hervor: direkt läßt er sich aus den viel allgemeineren Sätzen herleiten, welche im 7. Kapitel aufgestellt werden. Es genügt hier, zu bemerken, daß, wenn die Seiten des Dreiecks ABC das Doppelte der Seiten des ähnlichen Dreiecks $A'B'C'$ sind, nach diesem Lehrsatz die Fläche des ersten Dreiecks das Vierfache der Fläche des zweiten ist. Das ist leicht auf nebenstehender Figur zu verifizieren, wo A', B', C' die Mitten der Seiten des Dreiecks ABC sind.

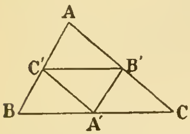


Fig. 39.

153. Die strenge Definition der Länge eines Kurvenbogens AB bietet einige Schwierigkeiten: sie setzt übrigens gewisse Bedingungen von *Regelmäßigkeit* bei der Kurve voraus, auf welche ich gelegentlich später zurückkommen werde.

Fig. 40

Einstweilen genügt es, zu bemerken, daß man (*theoretisch*) diese Länge mit beliebiger Genauigkeit berechnen kann, und zwar folgendermaßen: Stellen wir uns eine Reihe von Punkten $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ vor, die auf der Kurve von A nach B aufeinander folgen, und die gebrochene Linie $AA_1A_2A_3 \ldots B$, deren konsekutive Spitzen die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots, B$ sind.

Man nimmt an, diese Punkte seien sehr nahe beieinander oder, wenn man will, die Seiten dieser gebrochenen Linie seien sehr klein; außerdem nimmt man an, daß, wenn man von einer Seite auf die andere übergeht, die Richtung sehr wenig ändert: Der Winkel, den AA_1 (über A_1 hinaus verlängert) mit A_1A_2 bildet, wird als sehr klein angenommen; in andern Worten, der Winkel AA_1A_2 kommt zwei rechten Winkeln sehr nahe: Desgleichen die folgenden Winkel; unter diesen Bedingungen ist die Länge der gebrochenen Linie $AA_1A_2 \ldots B$ sehr wenig von der Länge des Kurvenbogens verschieden, und der Fehler, den man begeht, wenn man ihn der Länge des Bogens substituiert, kann als beliebig gering angenommen werden, vorausgesetzt, daß man die Seiten sowie die durch die Richtungen zweier konsekutiver Seiten gebildeten Winkel als genügend klein annehme.*)

---

wenden läßt, nehme ich an, daß dieses Verhältnis von der Wahl einer Flächeneinheit unabhängig ist.

*) Man beweist z. B., daß, wenn man der Länge einer Kreislinie mit einem Radius von einem Kilometer ein eingeschriebenes Vieleck substituiert, dessen Seiten 1 m oder weniger lang sind, der dadurch entstehende Fehler weniger

Man drückt dies aus, indem man sagt, die Länge des Bogens sei die *Grenze* der Länge einer in diesen Bogen eingeschriebenen gebrochenen Linie, welche die oben angegebenen Bedingungen erfüllt, wenn die Seiten dieser Linie unendlich abnehmen; dies impliziert natürlich, daß ihre Anzahl unendlich groß wird.

154. Wenn in zwei Kreisen von verschiedenem Radius zwei Bogen einem und demselben Zentriwinkel entsprechen, wie die Bogen AB, $A'B'$ der Figur 41, in der man der Einfachheit wegen konzentrische Kreise angenommen hat, sieht man direkt, daß das Verhältnis $\frac{AB}{A'B'}$ der Sehnen dieser Bogen gleich ist dem Verhältnis $\frac{R}{R'}$ der Radien R, R' der beiden Kreise. Das geht aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $\frac{OAB}{OA'B'}$ hervor, die einen gleichen, zwischen proportionalen Seiten liegenden Winkel haben.

Angenommen, man teile den einen dieser Winkel, AB z. B., in n gleiche Teile; PQ sei einer dieser Teile; wenn man die Radien, die in den Einteilungspunkten endigen, bis zur zweiten Kreislinie verlängert, ist es klar, daß der Bogen $A'B'$ dadurch in n gleiche Teile zerlegt wird: $P'Q'$ ist einer dieser Teile. Natürlich findet der vorhergehende Lehrsatz auch seine Anwendung auf die Sehnen der kleinen Bogen, welche die n Teile der Bogen AB, $A'B'$ bilden, und man hat im speziellen

$$\frac{R}{R'} = \frac{PQ}{P'Q'} = \frac{nPQ}{nP'Q'}.$$

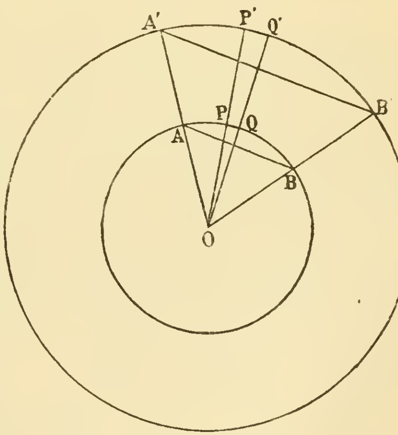


Fig. 41.

Die Größen nPQ, $nP'Q'$ sind aber eben die Längen der in die Bogen AB, $A'B'$ einbeschriebenen gebrochenen Linien von n Seiten, und diese Längen sind von denen der Bogen AB, $A'B'$ beliebig wenig verschieden, vorausgesetzt, daß man die Zahl n als genügend groß annehme; das Verhältnis $\frac{nPQ}{nP'Q'}$ ist also auch beliebig wenig von dem Verhältnis der Längen der Bogen AB, $A'B'$ verschieden.

als ein Drittel eines Millimeters beträgt. Es ist klar, daß dieser theoretische Fehler geringer ist als derjenige, der aus den bei der Berechnung dieser Längen entstehenden Fehlern erfolgen würde, wenn man sie realisieren wollte.

Ist also n genügend groß, so ist man sicher, daß die beiden Verhältnisse

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}}, \quad \frac{R}{R'}$$

beliebig wenig voneinander verschieden sind; da diese beiden Verhältnisse unabhängig von n sind, müssen sie gleich sein.*)

In Kreisen von verschiedenen Radien verhalten sich die Längen der Bogen, welche einem und demselben Zentriwinkel entsprechen, wie die Radien dieser Kreise.**)

Der Beweis erstreckt sich auf die ganzen Kreislinien, die untereinander wie die Radien sind. Daraus schließt man, daß das Verhältnis der Länge einer Kreislinie zur Länge seines Radius dasselbe für alle Kreise ist (Nr. 49). Man bezeichnet dieses Verhältnis durch 2π; die Zahl π ist gleich 3,14159265 ... Die Länge der Kreislinie eines Kreises mit einem Radius R ist $2\pi R$. Die Längen eines Bogens dieses Kreises von einem Grad, einer Minute, einer Sekunde, einem Zentesimalgrade sind:

$$\frac{\pi R}{180}, \quad \frac{\pi R}{10800}, \quad \frac{\pi R}{648000}, \quad \frac{\pi R}{200};$$

die Länge eines Bogens dieses Kreises, der durch die Zahl a gemessen wird, ist also

$$\frac{\pi R a}{180}, \quad \frac{\pi R a}{10800}, \quad \frac{\pi R a}{648000}, \quad \frac{\pi R a}{200},$$

je nachdem man als Bogeneinheit den Grad, die Minute, die Sekunde oder den Zentesimalgrad nimmt.

155. Wir wollen jetzt die durch die beiden Radien OA, OB begrenzte Fläche des Kreisausschnittes AOB und den Bogen AB betrachten. Stellen wir uns vor, wie vorhin, man habe den Bogen AB

---

*) Diese Art Beweisführung kommt ziemlich oft in der Mathematik vor: man betrachtet zwei unveränderliche Zahlen α, β, deren Gleichheit man beweisen will: stellen wir sie durch zwei Längen OA, OB dar, welche man von einem Punkte O aus auf dieselbe Gerade legt, so ist das dasselbe, wie wenn man sagt, die beiden Punkte A, B decken sich. Man beweist dann, daß der Unterschied zwischen den Zahlen α, β oder die Entfernung AB der beiden Punkte A, B beliebig gering ist. Die beiden Punkte A, B müssen sich dann decken.

Man gelangt z. B. dazu, indem man zeigt, daß man eine Zahl finden kann, die den Zahlen α, β beliebig nahekommt, oder, was dasselbe ist, einen Punkt, der den Punkten A, B beliebig nahe ist, und daß diese Punkte sich folglich decken, da sonst ein Punkt, der A sehr nahe wäre, nicht B sehr nahe sein könnte.

**) Das heißt: Das Verhältnis der Längen der Bogen ist gleich dem Verhältnis der Radien.

in n gleiche Teile zerlegt, und PQ sei einer dieser Teile: ist die Zahl n sehr groß, so deckt sich die Sehne PQ fast mit dem kleinen Bogen PQ; der Leser gibt gerne zu, daß die gesuchte Fläche sehr wenig verschieden ist von der Summe der Flächeninhalte der n gleichschenkeligen Dreiecke, die dem Dreieck OPQ analog sind und eine ihrer Spitzen in O haben, während ihre Grundlinien die Sehnen der n kleinen Bogen sind; die Höhe h eines dieser gleichschenkeligen Dreiecke ist die Gerade, die vom Punkt C nach der Mitte von PQ geht; sie ist sehr wenig verschieden vom Radius R, wie man leicht mit mathematischer Strenge beweisen kann; die Fläche des Dreiecks OPQ ist also $\frac{h}{2} \times PQ$; die Summe der Flächen der n analogen Dreiecke ist $\frac{h}{2} \times nPQ$; nun aber, vorausgesetzt, daß n genügend groß ist, ist nPQ, wie oben gesagt wurde, beliebig wenig von der Länge des Bogens AB verschieden; unter denselben Bedingungen ist $\frac{h}{2}$ sehr wenig von $\frac{R}{2}$ verschieden; da ein Produkt sehr wenig ändert, wenn man seine Faktoren sehr wenig ändert, so ist das Produkt $\frac{h}{2} \times nPQ$ sehr wenig von dem Produkt $\frac{R}{2}$ mit der Länge des Bogens AB verschieden. Da die Differenz zwischen diesem letzten Produkt und der gesuchten Fläche als beliebig gering angenommen werden kann, so kann man behaupten, daß die Zahl, welche die Fläche eines Kreisausschnittes mißt, gleich ist der Hälfte des Produkts der Zahl, welche die Länge des Bogens des Ausschnitts mißt, mit der Zahl, welche den Radius mißt. Der Beweis erstreckt sich auf die Fläche des ganzen Kreises; die Zahl, die diese Fläche mißt, ist gleich der Hälfte des Produkts der Zahlen, welche den Radius resp. die Länge der Kreislinie messen, d. h., indem wir den Radius durch R bezeichnen, gleich $\frac{1}{2} \times 2\pi R \times R = \pi R^2$.

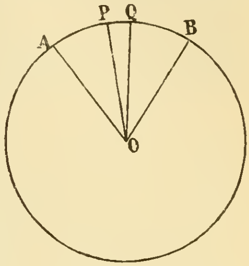


Fig. 42.

§ 9. Stereometrie.

156. Wie oberflächlich der Leser auch die Stereometrie studiert haben mag, wird er doch beim Studium dieses Werkes kaum auf eine Schwierigkeit stoßen; denn einerseits wird nur wenig darüber gesagt, und andererseits ist die einfache Bedeutung der geometrischen Figuren, die man jeden Tag sieht, wie die Wände eines Zimmers, eine Türe, die man öffnet usw. . . . oder die geringste Praxis im Zeichnen genügend, um ihn in die Lage zu setzen, die Sätze, deren er bedarf, zu verstehen und leicht anzunehmen. Die hauptsächlichsten dieser Sätze will ich kurz wieder erwähnen.

Man sagt, eine Gerade stehe auf einer Ebene senkrecht, wenn sie auf allen durch ihren Schnittpunkt mit der Ebene in dieser gezogenen Geraden senkrecht steht. So steht die Schnittlinie zweier vertikaler Wände auf dem horizontalen Fußboden senkrecht: man sieht leicht, daß diese Schnittlinie einen rechten Winkel bildet mit allen Geraden, die man durch ihren Endpunkt auf dem Fußboden ziehen kann. Desgleichen steht die Linie, welche die Türangel miteinander verbindet, senkrecht auf dem horizontalen Fußboden, und die untere Seite des Rechtecks, welches die Türe bildet, beschreibt diesen Fußboden, wenn die Türe sich um die Linie der Türangel dreht. Damit eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, in dem Sinne, wie wir eben gesehen, genügt es, daß sie auf zwei durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden senkrecht stehe. Von einem Punkt aus kann man eine Senkrechte und nur eine auf eine Ebene fällen: es ist die kürzeste Gerade, die von diesem Punkte nach der Ebene führt: ihre Länge ist die Entfernung des Punktes von der Ebene. Die schiefen Linien, die von einem und demselben Punkt nach einer Ebene führen und deren Endpunkte in dieser Ebene gleich weit vom Fußpunkte der Senkrechten entfernt sind, sind gleich.

157. Die Definition der Parallellinien ist Nr. 137 gegeben worden; man darf aber nicht vergessen, daß zwei parallele Linien immer in einer und derselben Ebene liegen müssen. Zwei Linien im Raum, die man ins Unendliche verlängert, können ganz leicht sich nicht begegnen, ohne aber deshalb parallel zu sein, so z. B. zwei Linien, die man willkürlich die eine an die Decke, die andere auf den Fußboden zeichnet. Zwei Lote einer und derselben Ebene sind parallel.

Eine Gerade ist zu einer Ebene parallel, wenn sie mit derselben, bei beliebiger Verlängerung, keinen Punkt gemeinsam hat. Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie sich bei beliebiger Ausdehnung nicht schneiden: in dem Falle sind der Fußboden und die Decke eines Zimmers. Zwei parallele Ebenen haben überall gleichen Abstand; allgemeiner: Stücke von Parallelen, die zwischen zwei Parallelen liegen, sind gleich. Die Schnittlinien zweier parallelen Ebenen durch eine und dieselbe Ebene sind Parallellinien. Zwei Winkel, deren Schenkel parallel sind und gleiche Richtung haben, sind gleich und in parallelen Ebenen gelegen. Zwei Vektoren, die mit einem dritten äquipollent sind, sind äquipollent unter sich, im Raum wie in der Ebene (Nr. 82).

Sind zwei nicht parallele Linien (D), (D') gegeben, und führt man durch die verschiedenen Punkte von (D) Parallellinien zu (D'), so sind diese Geraden in einer und derselben zu D' parallelen Ebene gelegen.

158. Nichts verhindert uns anzunehmen, daß ein Winkelhaken, dessen eine Seite sich längs eines Lineals verschiebt, einen festen Körper, den man an denselben heftet, in seiner Bewegung mit fortnimmt. Übrigens ist in Wirklichkeit der Winkelhaken selbst ein fester Körper von einer gewissen Dicke, die man als nicht vorhanden betrachtet, um ihn nur als eine ebene Figur von unveränderlicher Form anzusehen. Jedenfalls ist es einleuchtend, daß, wenn der Winkelhaken sich um eine bestimmte Länge längs des Lineals verschiebt, jeder Punkt M des an ihn gehefteten festen Körpers einen Vektor beschreibt, der dem durch einem Punkt des Winkelhakens beschriebenen Vektor gleich ist: denn evident ist das für den Fußpunkt M' des vom Punkt M auf den Winkelhaken gefällten Lotes; die Gerade MM', die sich mit dem festen Körper weiterbewegt, bleibt immer ein Lot der Ebene des Winkelhakens und bewegt sich in einer Ebene; betrachtet man zwei ihrer Stellungen $M_1M'_1$, $M_2M'_2$, so ist es klar, daß der vom Punkt M beschriebene Vektor M_1M_2 äquipollent ist mit dem vom Punkt M' beschriebenen Vektor $M'_1M'_2$, und folglich mit dem von einem beliebigen Punkt des Winkelhakens beschriebenen Vektor. Man kann sich also im Raum wie in einer Ebene eine Bewegung vorstellen, bei der alle Punkte des festen Körpers äquipollente Vektoren beschreiben: Diese Bewegung ist eine *Translation*, die durch einen beliebigen dieser Vektoren definiert wird. Man bemerkt, daß, wenn in diesem festen Körper ein Vektor AB, der zu ihm gehört, seine Lage ändert, er (trotzdem) äquipollent mit sich selbst bleibt. Eine Ebene des festen Körpers ändert die Lage und bleibt parallel mit sich selbst oder verschiebt sich auf sich selbst.

159. *Prisma* nennt man die auf folgende Weise gebildete Figur.

Betrachten wir in einer Ebene (P) ein Vieleck $ABCDE$, das eine der *Grundflächen* des Prismas sein wird, und eine Gerade (R), die nicht zu der Ebene (P) parallel ist und die Richtung der *Seitenkanten* des Prismas sein wird. Führen wir durch die Spitzen A, B, C, D, E nach einer und derselben Seite der Ebene (P) Parallellinien zu der Geraden (R), und nehmen wir auf diesen Parallelen gleiche Längen $AA', BB', CC', DD'\ EE'$, d. h. äquipollente Vektoren. Das sind dann die *Seitenkanten* des Prismas; ihre Endpunkte A', B', C', D', E' sind alle in der zu der Ebene (P) parallelen Ebene, die durch den Punkt A' gelegt wird und sind die Spitzen eines Vielecks $A'B'C'D'E'$, das dem Vielek $ABCDE$ gleich ist; es ist die andere Grundfläche des Prismas: man könnte das Vieleck $ABCDE$ mit dem anderen Vieleck $A'B'C'D'E'$ zur Deckung bringen, indem man es eine durch den Vektor AA' definierte Translation ausführen ließe, bei der jede Spitze eine der Seitenkanten beschreiben würde. Zwei aufeinanderfolgende Seitenkanten AA', BB' bestimmen ein Parallelogramm $AA'B'B$, dessen einander gegenüberliegende Seiten AB, $A'B'$ den beiden Grundflächen des Prismas angehören. Die Parallelogramme $AA'B'B$, $BB'C'C$, $CC'D'D$, $DD'E'E$, $EE'A'A$ und die beiden Grundflächen sind die Flächen des Prismas; die Summe der Oberflächen der Parallelogramme oder der Seitenflächen des Prismas ist die Seitenoberfläche des Prismas; die ganze Oberfläche erhält man, indem man zu der Seitenoberfläche des Prismas die Oberflächen der beiden Grundflächen hinzufügt. Die Höhe des Prismas ist die Entfernung der Ebenen der beiden Grundflächen. Das Prisma ist *gerade*, wenn die Kanten Lote der Ebenen der Grundflächen sind: im entgegengesetzten Falle ist es *schief*. Das Volumen des Prismas ist zwischen den Flächen enthalten.

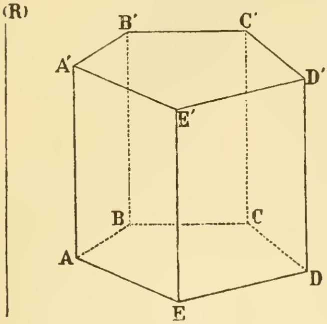


Fig. 43.

Zwei gerade Prismen, deren Grundflächen und Seitenkanten gleich sind, sind gleich.

Das Prisma wird dreiseitig, vierseitig, fünfseitig . . . genannt, je nachdem die Grundfläche ein Dreieck, ein Viereck, ein Fünfeck usw. ist.

160. Ist die Grundfläche ein Parallelogramm, so heißt das Prisma *Parallelipiped*. Das Parallelipiped hat sechs Flächen, von denen jede ein Parallelogramm ist; zwei einander gegenüberliegende Flächen sind gleich und können übrigens als Grundflächen des Parallelipipeds gelten, das so auf drei verschiedene Weisen als ein Prisma angesehen werden kann. Das Parallelipiped ist *gerade*, wenn es ein gerades Prisma ist; es ist *rechteckig*, wenn es gerade ist und seine Grundfläche durch ein Rechteck gebildet wird; alle seine Flächen sind dann Rechtecke:

Diese Figur ist uns bekannt durch den Anblick eines regelmäßigen Zimmers, dessen Fußboden, Decke und Wände Rechtecke bilden. Die drei Kanten, die von einer und derselben Spitze ausgehen, sind die drei *Dimensionen* des rechteckigen Parallelipipeds. Alle Kanten des Parallelipipeds sind jenen gleich. Ein *Würfel* ist ein rechteckiges Parallelipiped, bei dem alle Kanten gleich sind.

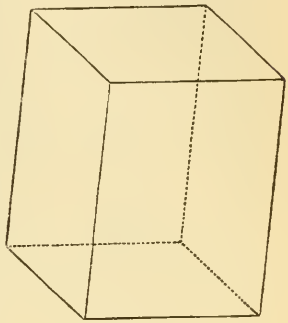


Fig. 44.

161. Nimmt man als Volumeneinheit den mit der Längeneinheit konstruierten Würfel (das Kubikmeter, wenn man das Meter als Längeneinheit nimmt), so ist die Zahl, welche das Maß des Volumens eines rechteckigen Parallelipipeds ist, gleich dem Produkt der drei Zahlen, welche dessen Dimensionen messen.

Der Beweis für den Fall, wo die Zahlen, welche die Kanten messen, ganze Zahlen sind, ist demjenigen in Nr. 150, betreffend den Flächeninhalt eines Rechtecks, sehr ähnlich; enthalten die Kanten z. B. 3, 5, 7 Längeneinheiten, so ist es leicht, das rechteckige Parallelipiped in $3 \times 5 \times 7$ mit dieser Längeneinheit konstruierte Würfel zu zerlegen; dieser Beweis schließt, im allgemeinen Fall, wie der eben angeführte, indem man annimmt, die drei Brüche, welche die drei Kanten messen, seien auf denselben Nenner gebracht worden. Nimmt man als Flächeneinheit das mit der Längeneinheit konstruierte Quadrat, so ist es klar, daß man sagen kann, das Volumen eines rechteckigen Parallelipipeds sei gleich dem Produkte der Zahl, welche dessen Grundfläche mißt, mit der Zahl, welche dessen Höhe mißt.

Aus diesem Beweis gehen folgende Sätze des metrischen Systems hervor: Das Kubikdezimeter ist der tausendste Teil des Kubikmeters, das Kubikzentimeter ist der tausendste Teil des Kubikdezimeters, das Kubikmillimeter der tausendste Teil des Kubikzentimeters. Daraus geht auch die Regel über die Art und Weise hervor, wie die Dezimalzahlen, welche Volumen ausdrücken, zu lesen sind: man teilt nämlich den dezimalen Teil, nachdem man ihn, wenn nötig, durch Nullen ergänzt hat, in Abteilungen von drei Ziffern, von denen die erste Kubikdezimeter, die zweite Kubikzentimeter, die dritte Kubikmillimeter ausdrückt.

162. Der Übergang von der Messung des rechteckigen Parallelipipeds zu der Messung eines beliebigen *geraden* Prismas ist genau derselbe wie der Übergang von der Messung der Oberfläche des Rechtecks zu der Messung der Oberfläche eines beliebigen Vielecks, und die Figuren aus Nr. 152 können dazu dienen: es genügt, sie als die Grundflächen von geraden Prismen von gleicher Höhe anzusehen. Auf der ersten sieht man, daß das gerade Parallelipiped, welches als Grundfläche das Parallelogramm $ABCD$ hat, äquivalent ist mit dem rechteckigen Parallelipiped, welches als Grundfläche das Rechteck $AA'D'D$ hat, wegen der Gleichheit der geraden Prismen, die als Grundfläche die gleichen Dreiecke $AA'B$, $DD'C$ haben: Daraus schließt man, daß das Volumen eines beliebigen geraden Parallelipipeds gleich ist dem Produkt der Zahl, die dessen Grundfläche mißt, mit der Zahl, die dessen Höhe mißt. Auf der zweiten Figur sieht man, daß das gerade Prisma, das als Grundfläche das Dreieck ABC hat, die Hälfte des geraden Parallelipipeds ist, das also Grundfläche das Parallelogramm $BADC$ hat, wegen der Gleichheit der beiden Dreiecke ACB, CAD: Das gerade Prisma, das als Grundfläche ABC hat, hat also das Maß die Hälfte des Produktes der Zahlen, welche seine Höhe resp. den Flächeninhalt des Parallelogrammes $ABCD$ messen, oder auch das Produkt der Zahlen, welche seine Höhe und seine Grundfläche messen. So ist das Volumen eines dreiseitigen geraden Prismas gleich dem Produkt der Zahlen, welche seine Grundfläche und seine Höhe messen. Dieser Satz läßt sich auf ein beliebiges gerades, vielseitiges Prisma ausdehnen, indem man die Grundfläche in Dreiecke und dadurch das vielseitige Prisma in gerade dreiseitige Prismen zerlegt, deren Grundflächen diese Dreiecke sind und deren Höhe diejenige des Prismas ist.

Der Satz bleibt wahr für ein schiefes Prisma, wie der Leser im VIII. Kapitel sehen wird. Dort wird auch gesagt, wie man das Volumen einer Pyramide ausdrückt.

§ 10. Transformationsmethoden.

163. Ich will diese Einleitung schließen mit einigen kurzen Angaben über die Transformationsmethoden.

Nehmen wir an, man lasse einem beliebigen Punkt M im Raume durch eine bestimmte Methode einen Punkt M' im Raume entsprechen, so daß, wenn der Punkt M gegeben ist, man den ihm entsprechenden Punkt M' konstruieren kann: dann hat man einen Transformationsmodus definiert*). Der Punkt M' ist die Abbildung des Punktes M.

Eine Figur (F) kann als eine Gruppe von Punkten angesehen werden; die Gruppe der diesen entsprechenden Punkte bildet eine

*) Eine solche Transformation, bei der ein Punkt dem anderen entspricht, heißt *Punkttransformation*; ich spreche nur von solchen.

Figur (F'), die der Figur (F) entspricht: es ist die Abbildung der Figur (F) durch den oben angegebenen Transformationsmodus.

164. Symmetrie in bezug auf einen Punkt. Betrachten wir z. B. einen festen Punkt O: jedem Punkt A lassen wir den Punkt A' entsprechen, der mit dem Punkt A *in bezug auf den Punkt* O *symmetrisch ist;* d. h. den Punkt A', der auf der Verlängerung von AO jenseits des Punktes O liegt, und zwar so, daß der Punkt O die Mitte zwischen A und A' ist. Man hat so ein gegenseitiges Entsprechen durch *Symmetrie in bezug auf einen Punkt* O, das sogenannte *Symmetriezentrum,* definiert.

Es ist klar, daß der symmetrische Punkt von A' der Punkt A ist: das drückt man aus, indem man sagt, das Entsprechen sei *gegenseitig.* Betrachtet man nun eine Figur (F), so bildet die Gesamtheit der symmetrischen Punkte dieser Figur die Figur (F'), welche mit der Figur (F) in bezug auf den Punkt O symmetrisch ist. Deckt eine Figur sich mit der in bezug auf den Punkt O symmetrischen Figur, so sagt man, der Punkt O sei ihr Symmetriezentrum: so ist ein Kreis symmetrisch in bezug auf seinen Mittelpunkt, desgleichen ein Parallelogramm.

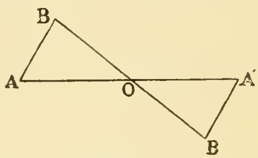


Fig. 45.

Wir wollen uns nun auf den Fall beschränken, wo die Figur eben ist und das Zentrum O sich in ihrer Ebene befindet. Läßt man die Ebene um zwei rechte Winkel sich um sich selbst drehen, und zwar um den Punkt O, so kommt der Punkt A in A'; jeder Punkt der Figur (F) deckt sich mit dem symmetrischen Punkt der Figur (F'): so daß die beiden Figuren (F) und (F') gleich sind. Besonders merke man, daß die symmetrische Figur einer Strecke AB eine gleiche und parallele Strecke $A'B'$ ist. Die beiden *Vektoren* AB, $A'B'$ haben entgegengesetzte Richtung.

Die Gleichheit zweier symmetrischer Figuren bleibt im allgemeinen nicht mehr bestehen, wenn diese Figuren im Raume sind.

165. Symmetrie in bezug auf eine Achse. Betrachten wir nun eine unbewegliche Gerade (D) und nehmen wir an, alles geschehe in einer Ebene: jedem Punkt A der Ebene lassen wir den Punkt A' entsprechen, der mit dem Punkt A *in bezug auf die Gerade* (D) *symmetrisch ist;* d. h. den Punkt A', den man erhält, indem man vom Punkt A aus eine Senkrechte $A\alpha$ auf die Gerade (D) fällt und sie um eine Länge $\alpha A' = A\alpha$ verlängert. Man hat dann in der Ebene eine Transformation durch Symmetrie in bezug auf die Gerade (D), die sogenannte *Symmetrieachse*, definiert. Es ist klar, daß der symmetrische Punkt von A' der Punkt A ist: Die Transformation ist wieder gegenseitig. Die Punkte der Achse sind mit sich selbst symmetrisch. Betrachtet man eine Figur (F), so bildet die Gesamtheit der mit den Punkten der Figur (F) symmetrischen Punkte eine Figur (F'), die mit der Figur (F) in bezug auf die Gerade (D) symmetrisch ist. Deckt eine Figur sich mit ihrer Abbildung in bezug auf die Gerade (D), so sagt man, sie könne diese Gerade als Symmetrieachse haben: so kann ein gleichschenkeliges Dreieck seine Höhe als Symmetrieachse haben. Ein Kreis ist symmetrisch in bezug auf einen beliebigen seiner Durchmesser. Läßt man die Ebene sich um die Gerade D drehen, so daß der obere Teil der Ebene den unteren deckt und umgekehrt, so ist es klar, daß jeder Punkt seine Abbildung deckt; so daß zwei Figuren (F), (F'), die in bezug auf die Gerade (D) symmetrisch sind, auch noch kongruent sind*).

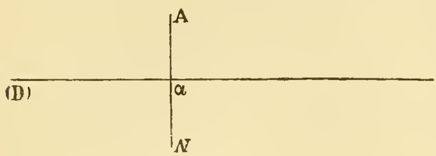


Fig. 46.

166. Translation. Angenommen, man habe im Raume einen unbeweglichen *Vektor* MM' und jedem Punkt A entspreche der Endpunkt A' eines Vektors, der mit MM' äquipollent ist und A als Ausgangspunkt hat. Man hat auf diese Weise im Raume einen Transformationsmodus definiert, der nicht mehr umkehrbar ist, denn die Abbildung des Punktes A' nach dieser Methode wäre nicht der Punkt A. Man kann so eine Figur (F) in eine Figur (F') transformieren. Die beiden Figuren sind kongruent, denn man bringt sie zur Deckung durch die Translation, die durch den Vektor MM' definiert wird. Jeder Vektor der Figur (F') ist äquipollent mit dem ihm entsprechenden Vektor der Figur (F), (Nr. 158).

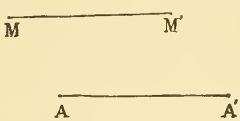


Fig. 47.

167. Homothetie. Angenommen, man habe einen unbeweglichen Punkt O, der *Homothetiezentrum* heißt, und eine positive Zahl k, das sogenannte *Verhältnis der Homothetie.* Jedem Punkt A des Raumes

*) Bei der Bewegung, durch die man eine Figur sich mit ihrer Abbildung decken läßt, bleibt man in derselben Ebene, wenn es sich um Symmetrie in bezug auf einen Mittelpunkt handelt, nicht aber, wenn es sich um Symmetrie in bezug auf eine Gerade handelt.

lassen wir einen Punkt A' entsprechen, der auf der Geraden OA liegt, auf derselben Seite wie A in bezug auf den Punkt O, in einer Entfernung OA', die gleich ist dem Produkte der Entfernung OA mit k: der Punkt A' ist dann die Abbildung des Punktes A durch direkte*) Homothetie.

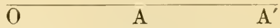


Fig. 48.

Je nachdem das Verhältnis k größer oder kleiner als 1 ist, ist OA' größer oder kleiner als OA. Ist $k = 1$, so fallen A und A' zusammen. Schließen wir diesen Fall aus, so ist der Punkt O der einzige, der mit seiner Abbildung zusammenfällt.

Faßt man eine Figur (F) als eine Gesamtheit von Punkten auf, so wird die Gesamtheit der Abbildungen der einzelnen Punkte eine Figur (F') ergeben: die Abbildung durch Homothetie der Figur (F). Im besonderen ist OA' die Abbildung des Vektors OA.

Die Figur (F) kann auch als Abbildung von (F') angesehen werden: Diese Homothetie ist dann definiert durch dasselbe Zentrum und durch das Verhältnis $\frac{1}{k}\cdot$

168. Betrachten wir zwei durch die Zentren O_1 und O_2 und das Verhältnis k definierte Homothetien. Ein beliebiger Punkt A hat dann zwei Abbildungen, A_1 und A_2. Die beiden Punkte liegen in der durch O_1A und O_2A bestimmten Ebene. Es besteht dann die Beziehung $O_1A_1 = kO_1A$ und da ja $k > 1$ sein soll:

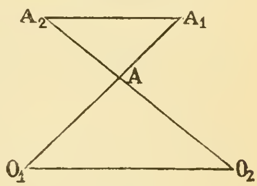


Fig. 49.

$$AA_1 = O_1A_1 - O_1A = kO_1A - O_1A = (k-1)\,O_1A;$$

desgleichen

$$AA_2 = (k-1)\,O_2A.$$

Die beiden Dreiecke $\frac{AA_1A_2}{AO_1O_2}$ sind mithin ähnlich, da die Winkel bei A als Scheitelwinkel gleich und die Seiten AA_1, AA_2 den Seiten AO_1, AO_2 proportional sind. Daher besteht die Beziehung:

$$\frac{AA_1}{AO_1} = \frac{AA_2}{AO_2} = \frac{A_1A_2}{O_1O_2} = k - 1\,.$$

*) Bei den folgenden Erörterungen verstehe ich unter Homothetie immer direkte Homothetie. Bei der *umgekehrten* Homothetie nimmt man an, die Zahl k sei negativ, die Punkte A und A' liegen zu beiden Seiten des Punktes O und das Verhältnis der Entfernungen OA', OA sei gleich dem absoluten Werte der Zahl k. Die Symmetrie in Beziehung auf den Punkt O ist eine umgekehrte Homothetie, bei der das Verhältnis k gleich -1 ist. Obschon es sehr leicht ist, die beiden Fälle miteinander zu behandeln, habe ich der Einfachheit halber vorgezogen, mich nur mit dem Fall zu beschränken, in dem die Homothetie direkt ist.

Andererseits ergibt sich aus den Sätzen Nr. 138 die Gleichheit der Winkel O_1 und A_1; mithin sind die Seiten A_1A_2 und O_1O_2 parallel. $A_1A_2 = (k-1)\,O_1O_2$, welches auch der Punkt A sein mag; die Geraden, auf denen die Vektoren A_1A_2 und O_1O_2 liegen, sind parallel, und aus der Figur ersieht man sofort, daß die Vektoren A_1A_2 und O_1O_2 entgegengesetzte Richtung haben. Transformiert man einen anderen Punkt B auf dieselbe Weise und sind B_1 und B_2 die beiden Abbildungen, so ist der Vektor B_1B_2 mit dem Vektor A_1A_2 äquipollent. Wir wollen nun die beiden Abbildungen (F_1), (F_2) einer Figur (F) betrachten. Die Punkte A_1, A_2; B_1, B_2, ... die von einem Punkte A, B, ... herrühren, wollen wir als einander entsprechend ansehen. Man sieht sogleich, daß Figur (F_1) in Figur (F_2) übergehen kann vermittels einer durch den Vektor AA_1 definierten Translation: denn bei dieser Bewegung beschreiben alle Punkte von (F_1) Vektoren, die mit A_1A_2 äquipollent sind. Die beiden Figuren (F_1) und (F_2) sind kongurent.

Ist $k < 1$, so gelten dieselben Behauptungen, bloß mit dem Unterschied, daß dann die beiden Vektoren A_1A_2 und O_1O_2 gleichgerichtet sind. Diese Betrachtungen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: Ändert man bloß das Zentrum der Homothetie (mit Beibehaltung des Verhältnisses k), so entsteht dadurch eine Verschiebung der Abbildung von (F). Diese Verschiebung ändert weder die Größe noch die Richtung der einzelnen Elemente der Abbildung. Dies berechtigt uns zu folgenden Behauptungen:

169. Die Abbildung eines Vektors in bezug auf ein beliebiges Homothetiezentrum ist ein paralleler, gleichgerichteter Vektor; läßt man das Homothetiezentrum mit dem Nullpunkte des Vektors zusammenfallen, so leuchtet obige Behauptung sofort ein. Das Verhältnis der Längen der beiden Vektoren ist k. Die Abbildung eines Winkels ist ein gleicher Winkel; um es einzusehen, braucht man nur das Homothetiezentrum in den Scheitel des Winkels zu legen: Die Abbildung fällt alsdann zusammen mit dem ursprünglichen Winkel. Die Schenkel des abgebildeten Winkels sind parallel und gleichgerichtet mit den Schenkeln des ursprünglichen Winkels*). Abbildungen von Punkten im Innern des Winkels fallen wieder in das Innere des abgebildeten Winkels. Die Abbildungen einer ebenen Figur ist wieder eine ebene Figur; legt man das Homothetiezentrum in die Ebene der Figur, so ist das oben Gesagte sofort klar.

*) Liegt das Homothetiezentrum jedoch auf einem der Schenkel, so fallen dieser Schenkel und seine Abbildung zusammen.

170. Betrachten wir eine Ebene (P) und eine in derselben gelegene Gerade (D). Ein Pfeil soll den angenommenen Richtungssinn kennzeichnen. Diese Gerade teilt die Ebene in zwei Halbebenen, die links und rechts von (D) liegen. Um die Begriffe links und rechts festzulegen, wollen wir uns an den in der Geographie in bezug auf Flüsse angewandten Sprachgebrauch halten. Der Vektor MA möge seinen Anfangspunkt auf (D) haben und nach links gerichtet sein. Nehmen wir in (P) ein Homothetiezentrum, so wird die Abbildung von (D) eine Gerade (D') sein, die mit (D) parallel und gleichgerichtet ist. Die Abbildung des Vektors MA wird ein mit diesem paralleler und gleichgerichteter Vektor $M'A'$ sein. Er wird also links von (D') liegen, gerade wie auch MA links von (D) lag. Der Bereich rechts von (D) verwandelt sich in den Bereich rechts von (D'); der Bereich links von (D) verwandelt sich in den Bereich links von (D'); zwei Punkte, die auf derselben Seite von (D) liegen, verwandeln sich in zwei Punkte, die auf derselben Seite von (D') liegen, usw.

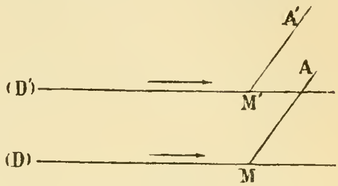


Fig. 50.

171. Die Abbildung eines Dreiecks ist ein ihm ähnliches Dreieck: man erkennt dies leicht, indem man als Homothetiezentrum eine der Spitzen des Dreiecks wählt. Ein Vieleck hat als Abbildung ein Vieleck, dessen Winkel den entsprechenden Winkeln des ersten gleich sind. Die Seiten des transformierten Vielecks sind denen des ursprünglichen Vielecks parallel; ihre Längen sind den resp. mit k multiplizierten Längen des ersten gleich. Die Abbildungen der inneren Punkte des ersten Vielecks liegen wiederum im Innern der Abbildung dieses Vielecks. Die ähnliche Regel findet statt für die äußeren Punkte. Denkt man sich nämlich die Seiten des ersten Vielecks mit einem gewissen Richtungssinn behaftet, so ist schon dadurch, nach den oben getroffenen Festsetzungen, die Lage eines Punktes (rechts oder links) in bezug auf alle Seiten des Vielecks festgelegt, und die Abbildung des Punktes wird dieselbe Lage (rechts oder links) in bezug auf die Abbildungen der Seiten haben. Übrigens ist dieser Satz nur eine Folgerung des Satzes, daß das Innere eines Winkels sich stets in das Innere seiner Abbildung transformiert.

172. Die Abbildung eines Quadrates ist wieder ein Quadrat. Zwei benachbarte Quadrate haben als Abbildung zwei benachbarte Quadrate; sie haben gegenseitig dieselbe Lage wie die beiden ersten.

Ein Netz nebeneinanderliegender gleicher Quadrate hat als Abbildung ein Netz gleichliegender Quadrate. Der Flächeninhalt eines transformierten Quadrates ist gleich dem mit k^2 multiplizierten Flächeninhalte des ursprünglichen Quadrates. Der Flächeninhalt des abgebildeten Netzes ist also gleich dem mit k^2 multiplizierten Flächeninhalte des ursprünglichen Netzes.

Eine ebene, quadratisch geteilte Fläche hat als Abbildung eine ebene, quadratisch geteilte Fläche; die Seite eines transformierten Quadrates ist der mit k multiplizierten Seite des ersten Quadrates gleich. Zeichnet man in die erste Fläche irgendeine Figur, so wird jeder Punkt dieser Figur einem Punkte der transformierten Figur entsprechen: die beiden Punkte liegen in entsprechenden Quadraten. Ohne weitere Erklärungen wird man sofort in dem eben Gesagten das Verfahren erkennen, eine Zeichnung zu verjüngen oder zu vergrößern, oder, wie man sich auch wohl ausdrückt, eine gegebene Zeichnung nach einem bestimmten Maßstabe anzufertigen.

173. Werden alle Entfernungen in der ersten Figur mit einer als Längeneinheit genommenen Strecke U gemessen, und ist a die Maßzahl der Entfernung zweier Punkte der ersten Figur, so wird die Entfernung dieser Punkte in der transformierten Figur durch die Zahl ka gemessen.

Wählen wir als Längeneinheit in der transformierten Figur eine Strecke V, deren Verhältnis zu U gleich k ist, so wird jede Entfernung in der transformierten Figur durch *dieselbe* Zahl gemessen wie die entsprechende Entfernung in der ersten Figur (Nr. 34). Wären z. B. alle Entfernungen der zweiten Figur doppelt so groß wie die entsprechenden der ersten, und wäre ebenfalls die Einheit dort doppelt so groß wie hier, so wären die Maßzahlen der entsprechenden Entfernungen dieselben.

174. Im Kap. VIII werden wir uns mit dem Flächeninhalte einer ebenen Figur beschäftigen; wir werden dort den strengen Beweis liefern, daß der Flächeninhalt einer durch Homothetie transformierten Figur A' gleich dem mit k^2 multiplizierten Inhalte der ersten Figur A ist. Für Flächen, die aus einer Gruppe von Quadraten bestehen, wurde dieser Satz schon oben ausgesprochen. Auch für ein Vieleck läßt dieser Satz sich direkt beweisen, indem man das Vieleck in Dreiecke zerlegt. Die Abbildung wird alsdann aus Dreiecken bestehen, die den ersten ähnlich sind, und das Verhältnis der Flächen zweier ähnlicher Dreiecke ist ja gleich dem Verhältnis der Quadrate der Seiten.

175. Vorläufig möge man den Satz als allgemein annehmen. Wählen wir nun für die Figur und für ihre Abbildung die Einheiten, wie wir es oben angegeben: nämlich so, daß die Maßzahlen für zwei entsprechende Längen der Figur und ihrer Abbildung gleich sind, so trifft dasselbe zu für die Flächen, falls man als Flächeneinheiten die Quadrate nimmt, die als Seitenlänge die entsprechenden Längeneinheiten haben. Wir wollen als Beispiel den schon oben besprochenen Fall wählen, wo die Entfernungen in der zweiten Figur doppelt so groß waren wie die der ersten. Die Flächen der zweiten Figur sind dann viermal so groß wie die entsprechenden Flächen der ersten: in beiden Fällen werden die Maßzahlen gleich sein, wenn die Flächeneinheit der zweiten Figur viermal so groß ist wie die Flächeneinheit der ersten.

176. Diese Betrachtungen lassen sich auch auf den Raum ausdehnen. Im Kap. VIII, wo der Begriff des Rauminhaltes erörtert wird, werde ich einige diesbezügliche Bemerkungen machen. Nimmt man eine Transformation durch Homothetie im Raume vor, so können die entsprechenden Volumina ebenfalls durch dieselben Maßzahlen ausgedrückt werden, wenn man zwei verschiedene Längeneinheiten wählt und als Volumeinheiten die mit diesen Einheiten konstruierten Würfel nimmt. Mißt man jedoch beide Figuren mit derselben Einheit, so werden die Volumina der zweiten Figur den mit k^3 multiplizierten Volumina der ersten gleich sein. Sind die Dimensionen der zweiten Figur doppelt so groß wie die der ersten, so werden ihre Volumina achtmal so groß sein wie die der letzteren.

177. Kann man zwei Figuren so legen, daß sie homothetisch sind, so nennt man sie ähnlich: Die entsprechenden Elemente sind dann die in beiden Figuren homothetischen. Aus dieser Definition folgt sofort, daß die Längen der zweiten Figur den mit k multiplizierten der ersten gleich sind; k ist das Verhältnis der Homothetie der beiden Figuren. Man sieht gleichfalls, daß, bei Annahme des oben für homothetische Figuren ausgesprochenen allgemeinen Satzes, Flächen und Volumina der zweiten Figur den mit k^2 resp. k^3 multiplizierten Flächen und Volumina der ersten gleich sind; entsprechende Winkel endlich sind gleich.

I. Kapitel.

Über einige Identitäten.

178. Das Binom $a + b$ stellt die Summe der beiden Zahlen a und $+ b$ (oder b) dar, ob diese nun positiv, Null oder negativ sind; desgleichen kann das Binom $a - b$ entweder als die Summe der beiden Zahlen a und $- b$ oder als die Differenz der Zahlen a und b angesehen werden (Nr. 112).

Um das Quadrat von $a + b$ oder das Produkt von $a + b$ mit $a + b$ zu bilden, kann man (Nr. 98) das Produkt eines jeden der Ausdrücke a und $+ b$ mit a bilden, dann das Produkt eines jeden derselben Ausdrücke mit $+ b$ und endlich die so erhaltenen Teilprodukte addieren. Schreibt man die Produkte mit a in eine Zeile, die Produkte mit b in eine andere, und gebraucht man die in Nr. 112, 115, 118, 120 erklärten Bezeichnungsweisen, so erhält man als Summe aller Teilprodukte

$$\begin{array}{lll} a^2 + ab & & \\ & + ab + b^2; & \end{array}$$

die beiden ähnlichen Monome (Nr. 118) $+ ab$ und $+ ab$ stehen untereinander; vereinigt man sie, so hat man endlich

(1) $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Will man das Produkt von $a - b$ mit $a - b$ bilden, so sieht man $a - b$ als die Summe der beiden Zahlen a und $- b$ an; man schreibt ebenso die Teilprodukte, die man durch Multiplikation dieser beiden Zahlen mit a und $- b$ erhält und erhält dann als Summe aller Teilprodukte

$$\begin{array}{lll} a^2 - ab & & \\ & - ab + b^2; & \end{array}$$

man hat also

(2) $$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Die beiden Gleichheiten (1), (2) sind Identitäten in a, b; darunter versteht man, daß die numerischen Werte der beiden Seiten gleich sind, welches auch die numerischen Werte seien, die man den Buchstaben a, b gibt.

Diese beiden Identitäten sind nicht verschieden: Denn die zweite läßt sich aus der ersten ableiten, indem man b durch die symmetrische Zahl $-b$ ersetzt, was man tun darf, da sie ja für beliebige Werte der Zahlen a, b richtig ist.

Ersetzt man b durch $-b$, so wird $+b$, das gleich b ist, zu $-b$, $a+b$ zu $a-b$; die erste Seite der Identität (1) wird also zu $(a-b)^2$; auf der zweiten Seite wird das Monom $+2ab$, in dem man *einen* Faktor durch den symmetrischen Wert ersetzt, zu dem symmetrischen Monom $-2ab$, und das Monom $+b^2$ oder $+bb$, in dem *zwei* Faktoren durch die symmetrischen Werte ersetzt werden, bleibt dasselbe; die zweite Seite wird folglich zu $a^2 - 2ab + b^2$, und die Identität (2) ist nichts anders als die Identität (1), in der man b durch $-b$ ersetzt hat; desgleichen ließe sich die Identität (1) aus der Identität (2) ableiten, indem man b in derselben durch $-b$ ersetzen würde.

So geben z. B. die Identitäten (1) und (2), wenn man $a = 100$, $b = 2$ annimmt

$$(100+2)^2 = 102^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404;$$

resp. $(100-2)^2 = 98^2 = 10000 - 400 + 4 = 10004 - 400 = 9604$;

aber die zweite Gleichheit hätte man ebensogut aus der Identität (1) ableiten können, indem man a durch 100 und b durch -2 in derselben ersetzt hätte.

Um das Produkt der beiden Binome $a+b$ und $a-b$ zu bilden, kann man die beiden Ausdrücke a und $+b$ des ersten mit a, dann mit $-b$ multiplizieren und dann die Teilprodukte, die man wieder untereinander in zwei Zeilen schreibt, addieren:

$$\begin{array}{rr} a^2 + ab & \\ -ab & - b^2. \end{array}$$

Durch Reduktion erhält man dann die Identität

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2; \tag{3}$$

diese Identität ändert nicht, wenn man in derselben b durch $-b$ ersetzt; durch diese Änderung stellt man nur die beiden Faktoren der ersten Seite um.

Nimmt man z. B. $a = 1000$, $b = 1$ an, so findet man

$$(1000+1) \times (1000-1) = 1001 \times 999 = 1000000 - 1 = 999999.$$

179. Will man desgleichen die dritte Potenz von $a+b$ entwickeln, so multipliziert man das Polynom $a^2 + 2ab + b^2$ oder $(a+b)^2$

mit dem Polynom $a + b$; man hat dann die Regeln aus Nr. 121, 122 anzuwenden, d. h. die Monome a^2, $+2ab$, $+b^2$, deren Summe der Multiplikand ist, sukzessiv mit a und $+b$ zu multiplizieren und dann die Teilprodukte zu addieren; schreibt man diese Teilprodukte in zwei Zeilen, so daß, wie vorher, die ähnlichen Monome untereinander zu stehen kommen, so hat man

$$\begin{array}{l} a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ + a^2b + 2ab^2 + b^3. \end{array}$$

Man hat also endlich, nach der Reduktion der ähnlichen Glieder

(4) $$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Um $(a - b)^3$ zu entwickeln, multipliziert man desgleichen mit a und mit $-b$ das Polynom $a^2 - 2ab + b^2$ und man hat

$$\begin{array}{l} a^3 - 2a^2b + ab^2 \\ - a^2b + 2ab^2 - b^3. \end{array}$$

Durch Reduktion der ähnlichen Glieder erhält man dann

(5) $$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Übrigens läßt sich auch hier die Identität (5) aus der Identität (4) ableiten, indem man b durch den symmetrischen Wert $-b$ ersetzt; denn im zweiten Gliede wird das Monom $+3a^2b$, in dem man *einen* Faktor durch seinen symmetrischen Wert ersetzt, zu dem symmetrischen Monom $-3a^2b$; das Monom $3ab^2 = 3abb$, in dem man *zwei* Faktoren durch ihre symmetrischen Werte ersetzt, ändert nicht; das Monom $+b^3 = +bbb$ endlich, in dem man *drei* Faktoren durch ihre symmetrischen Werte ersetzt, wird zu dem symmetrischen Monom $-b^3$, so daß das Polynom $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ richtig zu $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ wird.

180. Hier einige Anwendungen dieser Resultate, und zwar zuerst der Identität (1).

Ist b sehr klein, so ist b^2 noch viel kleiner, und man wird *annähernd* haben (Nr. 129, 130):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab.$$

Nimmt man z. B. $a = 5$, $b = \frac{1}{1000}$ an, so ist der Fehler, den man begeht, indem man für das Quadrat von $5 + \frac{1}{1000}$ die Zahl

$$25 + \frac{2 \times 5}{1000} = 25 + \frac{10}{1000} = 25{,}01$$

nimmt, gleich $\frac{1}{1000^2}$ oder 0,000001. Nimmt man desgleichen für das Quadrat von $5 - \frac{1}{1000}$ oder 4,999 die Zahl

$$25 - \frac{10}{1000} = 24{,}99,$$

begeht man denselben geringen Fehler.

Angenommen, man wolle die Quadratwurzel einer gegebenen positiven Zahl A haben und man habe einen Annäherungswert a derselben durch irgendein Verfahren, z. B. durch das graphische Verfahren aus Nr. 147 erhalten, so kann man diese Wurzel durch $a + b$ darstellen, indem man b für die kleine unbekannte Zahl setzt, die man zu a hinzufügen muß, um die genaue Wurzel zu erhalten: b ist übrigens positiv oder negativ, je nachdem a (das als positiv vorausgesetzt wird) ein oberer oder ein unterer Näherungswert ist; man hat dann

$$A = (a + b)^2$$

und folglich annähernd

$$A = a^2 + 2ab.$$

Diese letzte Gleichheit, die nur annähernd ist, kann als eine Gleichung des ersten Grades in b angesehen werden und gestattet uns also b vermittelst der bekannten Zahlen A und a zu berechnen; daraus folgt, daß

$$b = \frac{A - a^2}{2a}.$$

Dieser Wert ist natürlich nicht genau, gerade wie die Gleichung, aus der er gezogen wird; er ist nur annähernd; aber die so berechnete Größe $a + b$, die geschrieben werden kann

$$a + \frac{A - a^2}{2a} = \frac{2a^2 + A - a^2}{2a} = \frac{a^2 + A}{2a}$$

oder auch

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right),$$

nähert sich der Wurzel im allgemeinen vielmehr als die Zahl a; man kann übrigens fortfahren, in den vorhergehenden Beweisführungen a durch a_1 ersetzen und als neuen Näherungswert

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right)$$

nehmen usw. Nimmt man z. B. $A = 2$ an und wählt man als ersten Annäherungswert von $\sqrt{2}$ $a = 1{,}4 = \frac{7}{5}$, so findet man

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5} + \frac{10}{7}\right) = \frac{99}{70},$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{99}{70} + \frac{140}{99}\right) = \frac{19601}{13860};$$

um uns klar zu machen, wie diese Zahlen Näherungswerte von $\sqrt{2}$ sind, wollen wir ihre Quadrate mit 2 vergleichen; die Quadrate der Zahlen a, a_1, a_2 sind

$$\frac{49}{25}, \quad \frac{9801}{4900}, \quad \frac{384\,199\,201}{192\,099\,600},$$

deren Unterschied mit 2

$$-\frac{1}{25}, \quad \frac{1}{4900}, \quad \frac{1}{192\,099\,600}$$

beträgt; man sieht, mit welchem Grade von Annäherung a_2 die Gleichung $x^2 = 2$ erfüllt.

Ist α sehr klein, so kann 1 als ein erster Näherungswert von $\sqrt{1+\alpha}$ oder $\sqrt{1-\alpha}$ betrachtet werden; die vorhergehende Methode gibt als zweite Näherungswerte $1 + \frac{\alpha}{2}$ und $1 - \frac{\alpha}{2}$, deren Gebrauch sehr bequem ist. Es sind das obere Näherungswerte.

Die Identität (4) würde eine ähnliche Methode liefern, um die Kubikwurzel einer Zahl immer genauer zu finden, wenn man einen ersten Näherungswert derselben hat; ein solcher wäre durch mehr oder weniger geschicktes Erraten nicht schwer zu finden; ich gehe darüber hinweg.

Ich will auf eine vollständig verschiedene Anwendung der Identität (3) hinzeigen.

Angenommen, man suche zwei natürliche Zahlen x, y, so daß die Differenz ihrer Quadrate gleich sei einer gegebenen Primzahl p; man muß also folgende Gleichheit haben:

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = p.$$

Um nur mit positiven Zahlen zu operieren, nehme ich $x > y$ an. $x - y$ und $x + y$ sind ganze Zahlen, deren Produkt p ist, und die folglich beide die Primzahl p genau teilen; nun ist diese aber nur durch sich selbst und durch die Einheit teilbar; die kleinste der Zahlen $x - y$, $x + y$ muß also gleich 1 sein und die größte gleich p, und man muß haben

$$x - y = 1,$$
$$x + y = p;$$

addiert man die beiden Gleichungen oder subtrahiert man die eine von der andern, Seite für Seite, so findet man

$$2x = p + 1, \quad 2y = p - 1,$$
$$x = \frac{p+1}{2}, \quad y = \frac{p-1}{2}.$$

Diese beiden letzten Zahlen sind natürlich ganze Zahlen (ausgenommen den Fall, wo p gleich 2 wäre), denn jede Primzahl außer 2 ist ungerade: die Zahlen $p + 1$ und $p - 1$ sind folglich gerade. Übrigens erfüllen die für x und y gefundenen Werte die Gleichung $x^2 - y^2 = p$, denn man findet, wenn man diese Werte annimmt,

$$x + y = \frac{p+1}{2} + \frac{p-1}{2} = p; \quad x - y = \frac{p+1}{2} - \frac{p-1}{2} = 1,$$
$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = p.$$

181. Subtrahiert man die Identität (2) von der Identität (1), so findet man die Identität

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab;$$

dividiert man die beiden Seiten durch 4, so kann man auch sagen, da ja nach Nr. 125 (17) $\frac{(a+b)^2}{4}$, $\frac{(a-b)^2}{4}$ gleich ist $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ resp. $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$;

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab. \tag{6}$$

Wie man sieht, ist diese Identität dieselbe wie die Identität (3), wenn man

$$\frac{a+b}{2} = p, \quad \frac{a-b}{2} = q$$

setzt, woraus man schließen kann, indem man addiert und subtrahiert, daß

$$a = p + q, \quad b = p - q.$$

Ersetzt man in der Identität (6) a durch $p + q$, b durch $p - q$, so lautet sie

$$p^2 - q^2 = (p + q)(p - q);$$

Fig. 51.

und das ist nichts anders als die Identität (3).

Diese Identität (6) kann auf interessante Weise geometrisch interpretiert werden.

Betrachten wir auf der Achse OX (Nr. 75), auf der der Punkt O als Ausgangspunkt gewählt worden ist, zwei beliebige Punkte A, B, deren Abszissen ich durch a, b bezeichne, so daß man sagen kann, indem man die in Nr. 83 erklärten Bezeichnungsweisen anwendet:

$$\overline{OA} = a, \quad \overline{OB} = b.$$

Sei M die Mitte der Punkte A, B, so hat man (Nr. 85):

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM}$$
$$\overline{OM} = \overline{OB} - \overline{BM};$$

addiert man, so hat man, da sich die symmetrischen Zahlen $\overline{AM}$ und $\overline{BM}$ auf der rechten Seite gegenseitig aufheben:

$$2\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB},$$

oder:

$$\overline{OM} = \frac{a+b}{2};$$

wir erhalten also folgendes Resultat, das man sich merken kann: Die Abszisse der Mitte zweier beliebiger, auf der Achse OX gelegenen Punkte ist das arithmetische Mittel der Abszissen dieser beiden Punkte. Da übrigens die beiden Vektoren BM und MA äquipollent sind und folglich die Summe der Zahlen $\overline{BM}$, $\overline{MA}$ gleich ist dem Doppelten einer beliebigen derselben, und da andrerseits diese Summe immer gleich $\overline{BA}$ oder $\overline{OA} - \overline{OB}$ ist, so hat man

$$2\overline{MA} = a - b$$

oder

$$\overline{MA} = \frac{a-b}{2},$$

so daß die Identität (6) auch lauten kann:

(7) $$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OM}^2 - \overline{MA}^2.$$

Wir haben uns in der Beweisführung nur auf Sätze gestützt, deren Allgemeinheit festgestellt worden ist, so daß das Resultat sicher richtig ist, welches auch die Lage der Punkte O, A, B sei, vorausgesetzt, daß der Punkt M sich in der Mitte der beiden befinde.

182. Ich will jetzt eine Identität aufstellen, die als eine Verallgemeinerung der Beziehung (3) aufgefaßt werden kann. Multiplizieren wir das Polynom $a^2 + ab + b^2$ mit $a - b$; zu diesem Zwecke addieren wir die Produkte der Monome a^2, $+ab$, $+b^2$ mit a und mit $-b$; schreiben wir dann die Teilprodukte in zwei Zeilen, so daß die ähnlichen Monome untereinander zu stehen kommen, so erhält man

$$\begin{array}{llll} a^3 & + a^2b & + ab^2 & \\ & - a^2b & - ab^2 & - b^3. \end{array}$$

Nach vollzogener Reduktion findet man endlich

(8) $$(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3.$$

Multiplizieren wir desgleichen das Polynom $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ mit $a - b$, so finden wir zuerst

$$\begin{aligned} a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 \\ - a^3b - a^2b^2 - ab^3 - b^4, \end{aligned}$$

und endlich nach vollzogener Reduktion

$$(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a - b) = a^4 - b^4. \tag{9}$$

183. Betrachten wir im allgemeinen das Polynom

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n,$$

in dem n eine natürliche ganze Zahl ist, und in dem die Punkte an Stelle von nicht geschriebenen Gliedern stehen, welche genau dasselbe Gesetz befolgen wie diejenigen, die ausdrücklich aufgezählt sind. Dieses Gesetz lautet: Das Polynom ist homogen und vom Grade n; es ist die Summe aller möglichen Monome in a, b, die man erhält, indem man das Produkt von n entweder a oder b gleichen Faktoren bildet; der Koeffizient eines jeden dieser Monome ist 1. Das erste a^n enthält nur den Buchstaben a, das zweite und die folgenden, mit Ausnahme des letzten, enthalten die beiden Buchstaben mit den Exponenten $n-1$ und 1, $n-2$ und 2, ..., deren Summe immer n ist, da der erste Exponent jedesmal um eine Einheit ab-, der zweite hingegen um eine Einheit zunimmt; das letzte Monom b^n endlich enthält nur den Buchstaben b. Zu bemerken ist noch, daß ein jedes dieser Monome, deren Anzahl gleich $n+1$ ist, sich aus dem vorhergehenden ableiten läßt, indem man es durch a dividiert und mit b multipliziert.

Nehmen wir an, man multipliziere dieses Polynom mit $a - b$ und schreiben wir die Teilprodukte in zwei Zeilen, und zwar in die erste die Produkte mit a, in die zweite die mit $-b$, so hat man

$$\begin{aligned} a^{n+1} + a^nb + a^{n-1}b^2 + \cdots + a^3b^{n-2} + a^2b^{n-1} + ab^n \\ - a^nb - a^{n-1}b^2 - \cdots - a^3b^{n-2} - a^2b^{n-1} - ab^n - b^{n+1} \end{aligned}$$

oder $a^{n+1} - b^{n+1}$ nach Streichung der sich gegenseitig aufhebenden Glieder; mit andern Worten, man hat die Identität

$$(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n)(a - b) = a^{n+1} - b^{n+1}.$$

Nimmt man nacheinander $n = 1, 2, 3$ an, so führt uns diese Identität auf die Relationen (3), (8), (9).

Man kann auch schreiben, indem man n in $n - 1$ verwandelt

$$(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})(a - b) = a^n - b^n. \tag{10}$$

Der erste Faktor der ersten Seite enthält nun n Monome. Die Identität (10) ist richtig, welches auch die Zahlen a, b seien; nimmt man a als verschieden von b an, so leitet man davon ab:

$$\text{(11)} \qquad \frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a\,b^{n-2} + b^{n-1}.$$

Zu bemerken ist, daß die erste Seite unverändert bleibt, wenn man a durch b und b durch a ersetzt; denn durch eine solche Änderung wird die erste Seite zu $\frac{b^n - a^n}{b - a}$, und das ist gleich $\frac{a^n - b^n}{a - b}$, da ja ein Bruch aus dem andern durch Änderung der Vorzeichen, was bekanntlich den Bruch unverändert läßt, abgeleitet werden kann. Die zweite Seite der Gleichheit ändert nicht, wenn man a durch b und b durch a ersetzt; sie wird nur sozusagen rückwärts gelesen.

Ersetzt man in den Gleichheiten (10) und (11) a durch 1 und b durch x, so lauten sie:

$$\text{(12)} \qquad (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1})(1 - x) = 1 - x^n,$$

$$\text{(13)} \qquad \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1};$$

die Relation (13) gibt uns eine einfache Ausdrucksweise für die Summe der n-Glieder einer geometrischen Reihe, deren erstes Glied 1 ist, und deren Verhältnis x ist, wobei ein jedes der Glieder durch Multiplikation des vorhergehenden mit x entsteht.

184. Angenommen, in der Identität (10) seien a und b positive Zahlen und man habe $a > b$. Die Werte der Monome, die in dem Polynom $a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^{n-1}$ figurieren, und der Wert des Polynoms selbst sind positiv; es ist klar, daß alle diese Werte zunehmen, wenn man die Zahl b durch eine größere Zahl a ersetzt, daß sie hingegen abnehmen, wenn man a durch eine kleinere Zahl b ersetzt; ersetzt man nun aber b durch a, so wird ein jedes der Monome das Produkt von $n - 1$ Faktoren a, folglich gleich a^{n-1}; da man n Monome hat, wird das Polynom gleich na^{n-1}. Desgleichen wird das Polynom nb^{n-1}, wenn man a durch b ersetzt; das Produkt der beiden positiven Faktoren, welche die erste Seite der Identität (10) bilden, nimmt zu, wenn man den ersten Faktor durch na^{n-1} ersetzt, und nimmt ab, wenn man ihn durch nb^{n-1} ersetzt; man erhält also:

$$\text{(14)} \qquad na^{n-1}(a - b) > a^n - b^n > nb^{n-1}(a - b),$$

wenn man annimmt, daß

$$a > b > 0.$$

Setzt man in den Ungleichheiten (14) $b = 1$, so muß man a als eine Zahl ansehen, die größer als 1 ist, eine Zahl, die man durch $1 + \alpha$ darstellen kann, α positiv angenommen, $a - b$ ist dann gleich α, und die Ungleichheiten (14) nehmen folgende Form an:

$$n\alpha\,(1 + \alpha)^{n-1} > (1 + \alpha)^n - 1 > n\alpha,$$

oder, indem man zu beiden Seiten 1 hinzugefügt:

$$(15) \qquad 1 + n\alpha\,(1 + \alpha)^{n-1} > (1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha. \qquad (\alpha > 0)$$

185. Aus der letzten dieser Ungleichheiten kann man ersehen, daß die sukzessiven Potenzen einer Zahl, die größer ist als 1, schließlich größer werden als eine beliebige positive Zahl.

Angenommen z. B., man setze $\alpha = \frac{1}{1000}$, und man wolle eine Potenz von $1 + \alpha = 1{,}001$ finden, die größer als 1000000 ist. Ist n der Exponent dieser Potenz, so hat man $(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$, und es ist klar, daß, wenn $1 + n\alpha$ oder $1 + \frac{n}{1000}$ gleich 1000000 oder größer als 1000000 ist, $(1 + \alpha)^n$ selbst größer als 1000000 ist; es genügt folglich, n durch die Ungleichheit*)

$$1 + \frac{n}{1000} \geqq 1000000$$

zu bestimmen; diese Ungleichheit zieht folgende nach sich:

$$\frac{n}{1000} \geqq 999999, \quad n \geqq 999999000,$$

die, umgekehrt, die erste nach sich ziehen. Setzt man folglich a größer als 999999000 oder dieser Zahl gleich, so ist man sicher, daß $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^n$ (und a fortiori die höhern Potenzen) größer als 1000000 sein wird. Die Beweisführung hat allgemeinen Wert. Man sieht, daß der Satz sozusagen evident ist für $\alpha = 1$ oder $\alpha > 1$; beim Zählprozeß nimmt man an, daß die sukzessiven Potenzen von 10 schließlich jede beliebige Zahl übersteigen, weil man sonst nicht alle Zahlen im Dezimalsystem schreiben könnte; aber es ist nicht von vornherein klar, daß die sukzessiven Potenzen einer Zahl, die sehr nahe bei 1 ist, wie 1,001, schließlich jede beliebige Zahl übersteigen. Jede dieser Potenzen läßt sich aus der vorhergehenden ableiten, indem man sie mit einer Zahl multipliziert, die sehr nahe bei 1 liegt; sie ist folglich kaum größer als die vorhergehende. Obschon diese Potenzen

*) Das Zeichen $\geqq$ bedeutet größer als oder gleich.

immer größer werden, ist es doch nicht gestattet, gleich zu behaupten, daß sie schließlich jede beliebige Zahl übersteigen oder, wie man sich ausdrückt, daß sie unendlich groß werden; der Beweis zeigt am klarsten, daß man, um sicher zu sein, 1000000 zu übersteigen, eine sehr große Zahl Faktoren nehmen muß, die gleich 1,001 sind: in Wirklichkeit ist dieses Resultat übertrieben und man könnte durch genauere Methoden beweisen, daß man deren nur 1396 zu nehmen braucht; der zu erreichende Zweck war eben nicht, die kleinste Anzahl Faktoren, deren Produkt 1000000 übersteigt, zu finden, sondern eine Anzahl Faktoren zu finden, von der man sicher sein könnte, daß das Produkt 1000000 übersteigt.

186. Umgekehrt werden die sukzessiven Potenzen einer positiven Zahl, die kleiner ist als 1 (diese Potenzen nehmen nämlich mit zunehmendem Exponent ab), schließlich kleiner als eine beliebige Zahl. Denn eine positive Zahl, die kleiner ist als 1, kann als der umgekehrte Wert einer Zahl, die größer ist als 1, angesehen werden und unter der Form $\frac{1}{1+\alpha}$, bei der α positiv ist, ausgedrückt werden. Wünscht man, daß die $n$te Potenz dieser Zahl, d. h. $\frac{1}{(1+\alpha)^n}$ oder der umgekehrte Wert von $(1+\alpha)^n$, kleiner als $\frac{1}{1000000}$ z. B. sei, so genügt es, daß $(1+\alpha)^n$ größer als 1000000 sei, und es ist eben bewiesen worden, daß man immer einen Wert für n finden kann, der dieser Bedingung genügt. Will man z. B. eine Potenz von 0,999 bestimmen, die kleiner als $\frac{1}{1000000}$ sein soll, so bestimmt man eine Potenz von $\frac{1}{0{,}999} = \frac{1000}{999} = 1 + \frac{1}{999}$, die 1000000 übersteigt; zu diesem Zwecke sucht man eine natürliche Zahl n, die uns erlaubt,

$$1 + \frac{n}{999} \geqq 1000000$$

zu setzen; man braucht bloß

$$n \geqq 999 \times 999999$$

zu nehmen.

Auch hier könnte man bemerken, daß der Satz eines Beweises nur für den Fall bedurfte, wo die Zahl, die man in sukzessive Potenzen erhebt, sehr nahe gleich 1, immerhin aber kleiner als 1 ist, weil dann die sukzessiven Potenzen sehr langsam kleiner werden. Es ist zweifellos unnötig, des längern zu beweisen, daß die sukzessiven Potenzen von 0,1 z. B., d. h. die Zahlen

$$0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ldots$$

schließlich, wenn man weit genug geht, kleiner werden als jede beliebige Zahl, wie klein sie auch immer sei.

187. Das vorhergehende Resultat läßt sich in eine etwas verschiedene Form kleiden.

Es sei a eine positive Zahl, die kleiner als 1 ist; die Zahl a^n ändert mit n; ihr Wert (oder ihr Unterschied von 0) kann als beliebig klein angenommen werden, vorausgesetzt, daß n groß genug sei: dies will man ausdrücken, wenn man sagt, die veränderliche Zahl a^n habe als Grenze 0, wenn n unendlich zunimmt.

Die Identität (13) kann man auch ausdrücken, indem man $\frac{x^n}{1-x}$ zu den beiden Seiten hinzufügt:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x};$$

es geht daraus hervor, daß der Unterschied zwischen $\frac{1}{1-x}$ einerseits und der Summe $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ andrerseits gleich $\frac{x^n}{1-x}$ ist.

Man kann zuerst bemerken, daß, wenn der absolute Wert von x klein ist, derjenige von x^n und folglich von $\frac{x^n}{1-x}$ sehr klein ist, und zwar desto kleiner, je größer n ist: Daraus schließt man, daß man, um $\frac{1}{1-x}$ zu berechnen, als Näherungswerte $1+x$, $1+x+x^2, \ldots$ nehmen kann: wäre z. B. der absolute Wert von x geringer als 0,001, würde man, wenn man $\frac{1}{1-x}$ durch $1+x$ ersetzt, einen Fehler begehen gleich $\frac{x^2}{1-x}$, jedenfalls geringer als 0,000002. Desgleichen wäre $\frac{1}{1+x}$ fast gleich $1-x$.

Sehen wir jetzt x als eine positive unveränderliche Zahl an, die kleiner als 1 ist. Ich nehme sie nicht mehr als sehr klein an. Es ist nicht schwer, einzusehen, daß die Schlüsse, auf die ich jetzt kommen werde, auch dann richtig sind, wenn x negativ ist, vorausgesetzt, daß dessen absoluter Wert kleiner als 1 ist.

Nimmt man n als sehr groß an, so ist x^n nach dem, was wir eben gesehen haben, sehr klein, und es ist sogar gezeigt worden, daß man n genügend groß annehmen kann, um zu ermöglichen, daß x^n kleiner als eine beliebige Zahl sei: Daraus schließt man, daß man

n genügend groß annehmen kann, um zu ermöglichen, daß der Bruch $\frac{x^n}{1-x}$ kleiner als eine beliebige positive Zahl ε sei; es genügt zu diesem Zwecke, daß x^n kleiner sei als die positive Zahl $(1-x)\varepsilon$; daraus schließt man, daß man n genügend groß annehmen kann, um zu ermöglichen, daß die Differenz zwischen $\frac{1}{1-x}$ und $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$ beliebig klein sei: das drückt man aus, indem man sagt, daß, wenn x eine positive Zahl und kleiner als 1 ist, die (mit n veränderliche) Summe $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$ als *Grenze* $\frac{1}{1-x}$ hat, wenn n unendlich zunimmt.

So hat z. B. die mit n veränderliche Summe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}},$$

wenn n unendlich zunimmt, als Grenze $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$. Man kann ebensogut sagen, daß dieselbe Summe weniger 1, d. h.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

1 als Grenze hat, wenn n unendlich zunimmt, was sich geometrisch leicht klar machen läßt.

Es ist OA die Längeneinheit und A_1 die Mitte von OA; OA_1 hat als Maß $\frac{1}{2}$, desgleichen A_1A; nimmt man die Mitte A_2 von A_1A, so hat die Länge OA_2 als Maß $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$; ihre Differenz mit

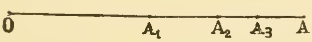


Fig. 52.

OA oder A_2A hat als Maß $\frac{1}{4}$; ist A_3 die Mitte von A_2A, so hat die Länge OA_3 als Maß $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$; ihre Differenz mit OA hat als Maß $\frac{1}{8}$ usw., indem man jedesmal die Mitte der *Strecke* nimmt, dessen Ausgangspunkt der letzte Punkt ist, bei dem man angelangt ist, und dessen Endpunkt der Punkt A ist; es ist klar, daß die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$, die man auf diese Weise erhält, um $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots \frac{1}{2^{n-1}}$ vom Punkt A entfernt sind, und daß man beliebig nahe an A herankommt, vorausgesetzt, daß man lange genug fortfahre: oder, was dasselbe ist, die Differenzen zwischen 1 und den Zahlen

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3},\ldots,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}},$$

die abnehmen in dem Maße, wie die Glieder sich mehren, können beliebig klein werden, vorausgesetzt, daß n groß genug ist.

188. Die Identität (10) hat noch eine andere Konsequenz, deren Wichtigkeit später klar werden wird. Sehen wir die natürliche Zahl n in derselben als unveränderlich an und nehmen wir an, die beiden Zahlen a, b seien sehr nahe bei einer und derselben Zahl A, so werden sich a^n und b^n kaum von A^n und ebenso die beiden Glieder des Bruches $\frac{a^n-b^n}{a-b}$ kaum von 0 unterscheiden.

Beiläufig sei noch bemerkt, daß, wenn man im allgemeinen weiß, daß die beiden Glieder eines Bruches kaum von zwei Zahlen p, q, deren zweite nicht 0 ist, verschieden sind, man daraus schließen kann, daß der Wert des Bruches sehr wenig von $\frac{p}{q}$ verschieden ist; aber aus der Tatsache, daß dessen Glieder kaum von 0 verschieden sind, ist für den Wert eines Bruches gar nichts zu schließen, und zwar um so weniger, da das Symbol $\frac{0}{0}$ keinen Sinn hat. Noch mehr: Sind die Glieder des Bruches sehr klein, so ist dasselbe der Fall für den Bruch, den man z. B. durch Multiplikation des Zählers mit 2 oder 3 erhält, und der zweite Bruch ist das Doppelte oder das Dreifache des ersten; obschon beide sehr kleine Glieder haben, sind sie weit davon entfernt, fast gleiche Werte zu haben.

So ist also aus der Tatsache, daß a^n-b^n und $a-b$ sehr kleine Zahlen sind, nichts für den Wert dieses Verhältnisses zu schließen.

Betrachten wir hingegen die zweite Seite unserer Identität: Jedes der darin vorkommenden Monome ist das Produkt von $n-1$ Faktoren, von denen jeder sich sehr wenig von A unterscheidet; der Wert dieses Monoms nähert sich also sehr stark A^{n-1}, und da es deren n im Polynom gibt, so ist der Wert des Polynoms kaum von nA^{n-1} verschieden; und zwar so wenig wie man will, vorausgesetzt, daß die Zahlen a, b, genügend nahe bei A liegen.

Das drückt man aus, wenn man sagt, das mit a, b veränderliche Verhältnis $\frac{a^n-b^n}{a-b}$ habe als Grenze die unveränderliche Zahl nA^{n-1}, wenn a und b sich der unveränderlichen Zahl A unendlich nähern.

Ist im speziellen b eine unveränderliche Zahl und kommt a unendlich nahe an die Zahl b heran, so hat das (mit a veränderliche) Verhältnis $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ als Grenze die Zahl nb^{n-1}.

Ist x kaum von 1 verschieden, so ist der Bruch $\frac{1 - x^n}{1 - x}$ kaum von n verschieden. Setzt man z. B. $n = 4$ und $x = 0{,}999$, so erreicht die Zahl

$$[1 - (0{,}999)^4] \times 1000$$

beinahe den Wert 4; und in der Tat, führt man die Rechnung aus, so findet man, daß die Differenz weniger als 0,006 beträgt.

II. Kapitel.

Geometrische Algebra.

189. Schon die Griechen kannten, wenn auch unter anderer Form, verschiedene wichtige Identitäten und die Lösung verschiedener Probleme, die wir heute zur Algebra zu zählen gewohnt sind. Für sie waren diese Identitäten weniger Relationen der Zahlen untereinander als vielmehr Eigenschaften von geometrischen Figuren, und die Lösung dieser Probleme bestand meistens in einer geometrischen *Konstruktion*, nicht in einem Mittel, den Zahlenwert der Unbekannten zu finden.

Jede Zahl kann dargestellt werden durch die Länge einer begrenzten geraden Linie, wenn man einmal eine Längeneinheit gewählt hat, und umgekehrt kann jede Länge mittels dieser Einheit gemessen werden. Es ist folglich klar, daß man Zahlenprobleme in geometrische verwandeln kann und umgekehrt. Die geometrischen Konstruktionen, besonders die, welche man mit Lineal und Zirkel ausführen konnte, standen in den Augen der Griechen weit über den Resultaten einer Berechnung, die in den meisten Fällen doch nur annähernd richtig waren, da diese Resultate Irrationalzahlen waren.

Für uns ist vielleicht das Gegenteil der Fall, da unsere Rechnungsverfahren eine Annäherung zulassen, die theoretisch unendlich ist, während die geometrischen Konstruktionen, die Messungen der Angaben und der Resultate notwendigerweise nicht ganz genau sind. Wie dem auch sein mag, es ist immerhin gut, an einigen einfachen Beispielen den Standpunkt nachzuweisen, auf den sich die Alten stellten.

Zuerst ist es wichtig, zu bemerken, daß sie nichts hatten, was an die Anwendung von negativen Zahlen erinnert. Wir lassen also hier diese Zahlen weg; und alle die Zahlen, denen wir in diesem Kapitel begegnen, sind positiv, oder absolut. Im speziellen kann das Symbol AB sowohl eine begrenzte Linie mit den Endpunkten A und B darstellen, als auch die absolute Zahl, welche die Länge dieser Linie mißt. Die Zeichen $+$ und $-$ seien genommen in dem operatorischen Sinne, den sie in der Arithmetik haben; die Subtraktionen, die man antrifft, sollen auch nur möglich sein im Sinne der Arithmetik, d. h. die Zahl, die man abziehen will, ist kleiner gedacht als die, von der man sie abzieht.

190. Anstatt also mit Zahlen zu operieren, betrachten wir begrenzte Geraden. Die Addition und Subtraktion zweier Strecken lassen sich gleich ausführen, wenn man beide Linien auf eine und dieselbe Gerade aufträgt. Die Multiplikation einer Geraden mit einer ganzen Zahl ist nichts anderes als eine Addition, die sich mehrmals wiederholt. In Nr. 54 hat man gezeigt, wie man eine Gerade in n gleiche Teile zerlegen kann.

Diese einfachen Begriffe genügen, um eine gewisse Anzahl Probleme auf ganz einfache Weise zu lösen.

Suchen wir z. B. zwei Längen, deren Summe und deren Unterschied uns bekannt sind.

Es sei OA die gegebene Summe und OB der Unterschied der beiden Längen. OB muß selbstverständlich kleiner sein als OA. Es ist klar, daß man zwei Strecken, deren Summe OA ergibt, findet, wenn man einen beliebigen Punkt M zwischen O und A nimmt; OM und MA sind z. B. zwei solche Strecken. Ferner will man, daß ihr Unterschied gleich OB sei. Ist OM die größere der beiden Strecken, so erhält man ihren Unterschied, wenn man vom Punkte M aus auf die dem Punkte A entgegengesetzte Seite eine Länge MA aufträgt. Das Ende dieser Strecke muß auf B fallen, d. h. M muß die Mitte von AB sein. Stellt man umgekehrt den Punkt M in die Mitte von AB, so ist es klar, daß die Summe der Längen OM und MA gleich OA und der Unterschied zwischen denselben Längen oder zwischen OM und MB gleich OB ist. Das Problem ist also gelöst. Übrigens sieht man leicht an der Figur, daß MA die Hälfte des Unterschiedes BA zwischen OA und OB, und daß OM die halbe Summe von OA und OB ist. Die Identität zwischen der geometrischen und der arithmetischen Lösung ist klar.

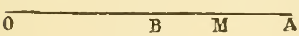


Fig. 53.

191. *Das Produkt* zweier Strecken ist unverständlich ohne folgende Definition. Die Alten verstanden darunter das Rechteck, das man aus diesen beiden Linien als Seiten aufbaut, oder vielmehr den Teil der Ebene, den dieses Rechteck einschließt, seinen Flächeninhalt, wenn man will, doch wird diese Fläche eher als eine „Sache" betrachtet denn als eine Zahl. Das Quadrat einer Strecke ist analog das Quadrat, dessen Seite gleich der Strecke ist. Umgekehrt wandte man lange den Ausdruck „Rechteck zweier Zahlen" an, um das

Produkt dieser beiden Zahlen zu bezeichnen, und der Ausdruck „Quadrat einer Zahl" ist in der Sprache der Mathematik beibehalten worden. Daß das so aus zwei Linien gebildete Rechteck oder jede gleichwertige Figur das Produkt der beiden Zahlen, welche diese beiden Linien messen, ersetzen kann, erhellt daraus, daß der Flächeninhalt dieses Rechtecks ausgedrückt wird durch das Produkt der beiden Zahlen, welche die Längen der beiden Strecken messen, wenn man als Flächeneinheit das Quadrat nimmt, dessen Seite der Längeneinheit gleich ist.

Die Addition und die Subtraktion von zwei Flächen wird definiert wie in Nr. 151.

Man hat ferner schon in Nr. 150 bemerkt, daß eine der Fundamentaleigenschaften der Multiplikation, diejenige, welche die Gleichheit $ab = ba$ ausdrückt, sofort aus dieser Definition des Produktes zweier Strecken ersichtlich ist.

Die Eigenschaft, welche man durch die Gleichheit

$$(a + b)c = ac + bc$$

ausdrückt, läßt sich auch von beistehender Figur ablesen. Hier sind die Linien OA und AB gleich a, b; OB ist also gleich $a + b$; das Rechteck $OBB'C$, dessen Seite $OC = c$ ist, ist gleich dem Produkt $(a + b)c$. Man sieht, daß es die Summe der beiden Rechtecke ac, bc ist. Die Gleichung

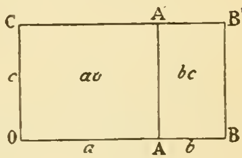


Fig. 54.

$$(a - b)c = ac - bc$$

läßt sich ebenso beweisen. Vom numerischen Standpunkte aus erfolgt die Richtigkeit dieser Gleichheiten aus der geometrischen Beweisführung.

Diese Beweisführungen sind bemerkenswert schon infolge ihrer großen Einfachheit. Sie sind es um so mehr, weil sie sich, einmal die Definitionen angenommen, auf alle Zahlen anwenden lassen, ob a, b, c ganze Zahlen, Brüche oder sogar Irrationalzahlen darstellen.

192. Haben wir nun einmal den Begriff des Produktes zweier Strecken als das aus diesen Strecken konstruierte Rechteck angenommen, so ergibt sich natürlicherweise folgende Fragestellung: Gegeben ist ein Rechteck; es sollen alle ihm flächengleiche Rechtecke gesucht werden; ferner folgende Aufgabe: ein gegebenes Rechteck in ein anderes mit vorgeschriebener Grundlinie zu verwandeln. Vom rechnerischen Standpunkte aus haben wir sofort folgende Lösung: Sind a, b die Maßzahlen der Seiten des gegebenen Rechtecks, c die Maßzahl der vorgegebenen Grundlinie des zu suchenden Rechtecks, und x endlich die Maßzahl der unbekannten Seite, so hat man sofort $cx = ab$ oder $x = \frac{ab}{c}$.

Eine geometrische Lösung dieser Frage beruht auf folgender Bemerkung.

$ABCD$ sei ein Parallelogramm und O ein Punkt seiner Diagonale AC. Zieht man durch diesen Punkt die Parallelen EF, GH, so teilt man das Parallelogramm $ABCD$ in vier kleinere Parallelogramme. Die beiden Parallelogramme $EOHB$, $EOFD$ (welche nur den Schnittpunkt O auf AC haben) sind flächengleich.

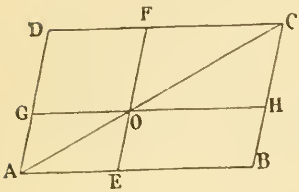


Fig. 55.

Das erste erhält man, indem die beiden Dreiecke AEO, OHC vom Dreieck ABC abzieht; das zweite, indem man vom Dreieck CDA, welches ABC gleich ist, das Dreieck $OGA = AEO$ und das Dreieck $CFO = OHC$ abzieht. Alle diese Gleichheiten zwischen Dreiecken kommen daher, daß die Diagonale eines Parallelogramms letzteres in zwei gleiche Dreiecke zerlegt. Es versteht sich von selbst, daß dieser Satz sich auf den Fall anwenden läßt, wo das Parallelogramm zum Rechteck wird. Hier nun, wie man ihn zur Lösung der oben gestellten Frage anwendet.

$OAPB$ sei das gegebene Rechteck und BC die Seitenlänge des zu suchenden Rechtecks, die gegeben ist. Das zu findende Rechteck muß mit $AOPB$ flächengleich sein. Ich nehme an, die Länge BC sei auf die Verlängerung einer der beiden Seiten BP des gegebenen Rechteckes aufgetragen worden. Vollenden wir alsdann das Rechteck $OBCD$, dessen Seiten BO, BC sind und verlängern wir seine Diagonale DB bis zum Punkte E, wo sie die Verlängerung der Seite AP des gegebenen Rechteckes trifft.

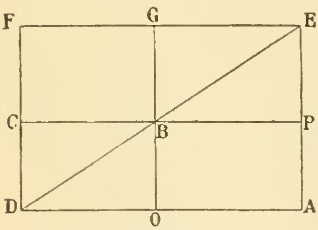


Fig. 56.

Vollenden wir nun das Rechteck $DAEF$ und verlängern wir OB, bis wir FE in G treffen. Es erhellt hieraus, daß das Rechteck $CBGF$ gemäß dem oben erwähnten Satz dem gegebenen Rechteck gleich ist und als Lösung des Problems angesehen werden kann. Sind a, b die Maßzahlen der Seiten OA, OB des gegebenen Rechtecks und c die Maßzahl der Seite BC des zu suchenden Rechtecks, so wird die Länge BG ausgedrückt durch die Zahl $x = \frac{ab}{c}$. *)

193. Wenden wir uns nun der Identität

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

zu, und sehen wir, wie sie sich unter Annahme der Regeln über Multiplikation zweier Strecken, Addition und Subtraktion zweier Flächen, geometrisch interpretieren läßt.

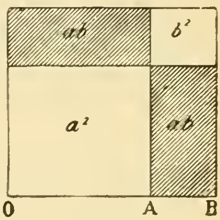


Fig. 57.

Tragen wir aneinandergereiht auf OA, AB die beiden gegebenen Strecken a, b auf, so stellt OB die Summe $a + b$ der beiden Längen dar. Auf dieser Summe konstruiert man ein Quadrat, und ohne weitere Erklärung zeigt uns die Figur, daß dieses Quadrat sich in zwei andere Quadrate zerlegt, nämlich in das Quadrat der Linie a und das der Linie b, und in zwei Rechtecke von den Seitenlängen a, b. Die geometrische Identität ist evident; die numerische, wo man a und b als die Längenmaße der gleichnamigen Linien betrachtet, ist eine Folge davon.

194. Die Identität

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

muß natürlicherweise von unserem Standpunkte aus als von der vorhergehenden verschieden angesehen werden. Man könnte sie von der oben gezeichneten Figur ableiten. Man erhält sie aber besser folgendermaßen:

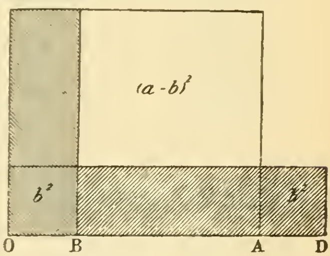


Fig. 58.

Wir tragen auf eine und dieselbe Gerade, von einem und demselben Punkte aus, die beiden Strecken $OA = a$ und $OB = b$ auf; BA stellt alsdann die Differenz $a - b$ dar. Nehmen wir $AD = b$; BD ist alsdann gleich a.

Konstruieren wir einerseits ein Quadrat auf OA, andererseits ein Quadrat auf jeder der

*) x ist, was man die „vierte Proportionale" zu a, b, c nennt; dieser Name kommt daher, daß man folgende Gleichheit der Verhältnisse oder folgende Proportion haben muß:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{c}.$$

In dieser Gleichheit kennt man drei Glieder a, b, c. In allen Lehrbüchern der Geometrie findet man eine Konstruktion der vierten Proportionalen, welche sich auf diese Proportion stützt.

Linien OB, AD. Ferner hat man mit Strichen verschiedener Richtung zwei Rechtecke mit den Seitenlängen a und b gekennzeichnet. Die Summe dieser Rechtecke und des Quadrates von BA, das weiß geblieben ist, bildet die ganze Figur, d. h. das Quadrat von OA und das von AD. Umgekehrt erhält man das Quadrat von BA oder $(a-b)^2$, indem man von a^2+b^2 die Rechtecke abzählt, und die Identität

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

ergibt sich ganz klar. Natürlich ist es erlaubt, ihr eine numerische Bedeutung beizulegen.

195. Lassen wir die Figur beiseite, welche die Identität

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

darstellt und halten wir uns einen Augenblick bei derjenigen Figur auf, welche der äquivalenten Identität

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$$

entspricht. Letztere ist nur eine andere Schreibweise der ersteren. Es möge $a > b$ sein.

OA, OB (Fig. 59) seien die beiden Längen a, b, welche man vom Punkt O aus auf eine und dieselbe Gerade trägt. M sei die

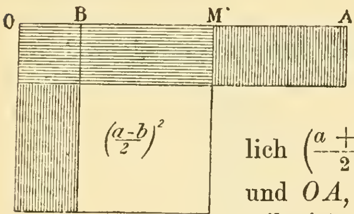


Fig. 59.

Mitte von BA; OM ist gleich $\frac{a+b}{2}$, BM und MA gleich $\frac{a-b}{2}$. Auf OM hat man ein Quadrat konstruiert, nämlich $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, dann noch ein Rechteck auf OB und OA, welches in zwei ungleiche Rechtecke zerteilt ist, wovon jedes eine Seite gleich OB hat. Das erste, dessen eine Seite OM ist, hat horizontale Schraffierung, das zweite mit der Seite MA vertikale. Man sieht gleich, daß dieses zweite Rechteck dem anderen Rechteck der Figur gleich ist, das ebenfalls vertikal schraffiert ist. Fügt man also zu diesem letzten Rechteck das horizontal schraffierte hinzu, so erhält man eine dem Rechteck $OA \times OB$ äquivalente Figur; fügt man ferner dieser Figur das weißgelassene Quadrat $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ hinzu, so reproduziert man augenscheinlich das Quadrat von OM oder $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Der Satz ist also aufgestellt; man hat bewiesen, daß:

$$OA \times OB = \overline{OM}^2 - \overline{BM}^2$$

ist. Diese Formel, als Zahlenverhältnis zwischen den Entfernungen der Punkte O, A, B, M (die Mitte der Punkte A, B) betrachtet, haben wir schon in Nr. 181 gefunden; aber die Formel aus Nr. 181, welche man vermöge der Eigenschaften der negativen Zahlen aufgestellt hat, hatte eine allgemeine Bedeutung, auf welche man jetzt keinen Anspruch mehr erheben kann. Die jetzige Formel, betrachtet von unserem neuen Standpunkte aus, wo man nur mehr mit positiven Zahlen und im arithmetischen Sinne möglichen Operationen zu tun hat, ist nur richtig, wenn der Punkt O, wie wir dies in unserer Figur angenommen, außerhalb der Punkte A, B liegt. Vom selben Standpunkte aus müßte sie vervollständigt werden durch die Formel

$$OA \times OB = \overline{BM}^2 - \overline{OM}^2,$$

welche sich bezieht auf den Fall, wo O zwischen A und B liegt, wo also BM größer ist als OM. Dem Leser überlassen wir es, die Figur, welche diese Gleichheit beweist, zu konstruieren.

196. Es ist ganz natürlich, diese verschiedenen Sätze mit der Eigenschaft des rechtwinkeligen Dreiecks zu vergleichen, gemäß welcher das Quadrat der Maßzahl der Hypotenuse gleich ist der Summe der Quadrate der Maßzahlen der beiden Katheten. In Nr. 145 hat man diesen Satz bewiesen. Geometrisch kann man ihn auch leicht aufstellen, indem man zeigt, daß das Quadrat der Hypotenuse gleich ist der Summe der Quadrate der beiden Katheten.

Wenn man nämlich, auf der Hypotenuse des in O rechtwinkeligen Dreiecks OAB das Quadrat $ABCD$ konstruiert, dann DE, CG senkrecht auf OB, AE und CF parallel zu OB zieht, so erkennt man sofort, daß die rechtwinkeligen Dreiecke OAB, FDC, EAD, GBC kongruent sind, weil die entsprechenden Winkel und die Hypotenusen gleich sind. Hieraus ziehen wir folgende Gleichheiten:

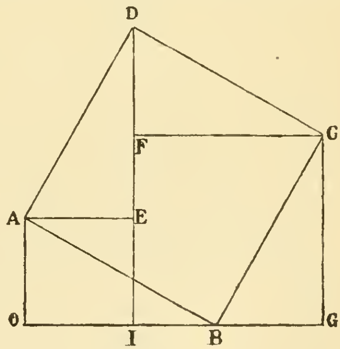


Fig. 60.

$$OA = AE = BG.$$

Da BG gleich OI ist, so ist $OB = IG$, und man sieht leicht, daß die Figuren $OIEA$, $IGCF$ die Quadrate der Katheten OA, OB des Dreiecks sind. Nehmen wir von der Summe dieser Quadrate das

Dreieck OAB weg, um es nach FDC, das Dreieck GBC, um es nach EAD zu legen, so bildet man das Quadrat $ABCD$, das Quadrat von AB also, welches somit richtig die Summe der Quadrate von OA und OB ist. Die Gleichheit

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$$

besteht also vom geometrischen Standpunkt aus; hieraus folgt, daß sie auch vom numerischen Standpunkt aus richtig ist*).

197. Die in diesem Kapitel aufgestellten Lehrsätze erlaubten den Alten, mehrere wichtige Probleme zu lösen, selbst schon bevor sie die Theorie der proportionalen Größen zu der Vollkommenheit gebracht hatten, die wir bei Euklid bewundern**).

Bemerken wir zuerst, daß die Relation

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$$

oder, wenn wir wollen, die Relation

$$OA \cdot OB = \overline{OM}^2 - \overline{BM}^2,$$

in welcher M die Mitte von AB und O einen beliebigen, jedoch nicht zwischen A und B gelegenen Punkt der Geraden AB darstellt, uns erlaubt, die Konstruktion der mittleren Proportionalen zweier Linien a und b oder OA und OB, auf die Konstruktion eines in C rechtwinkligen Dreiecks zurückzuführen, wovon man die Hypotenuse OM und eine Kathete $MC = MB$ kennt. Das Quadrat der Kathete OC dieses Dreiecks, welches gleich ist $\overline{OM}^2 - \overline{BM}^2$, wird gemäß der eben erwähnten Gleichheit gleich $OA \times OB$. Schlägt man um die

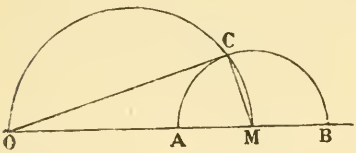


Fig. 62.

*) Die Sätze aus Nr. 145, wonach in einem in O rechtwinkeligen Dreieck, dessen Höhe OD ist, die numerischen Relationen:

$$\overline{OA}^2 = AD \times AB, \qquad \overline{OD}^2 = AD \times BD$$

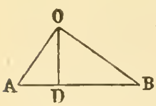


Fig. 61.

bestehen, sind bewiesen worden durch Anwendung von ähnlichen Dreiecken, und man kann ihnen einen geometrischen Sinn beilegen. Das Quadrat OA hat gleiche Fläche wie das Rechteck $AD \times AB$ usw. Der Leser kann zum Zeitvertreib diese Relationen ableiten aus dem Satz des Quadrates der Hypotenuse und den Regeln, die sich beziehen auf das Quadrat einer Summe oder einer Differenz.

**) Siehe „Geschichte der Mathematik des Altertums und des Mittelalters" von G. H. Zeuthen; Kopenhagen 1896, A. F. Höst & Sohn.

Durchmesser AB und OM Halbkreise, so ist der Schnittpunkt C der beiden Halbkreise der Scheitelpunkt eines in C rechtwinkeligen Dreiecks OCM, das OM zur Hypotenuse hat und dessen Kathete MC gleich MB ist. Die Kathete OC ist das gesuchte geometrische Mittel*).

198. Das geometrische Mittel zweier Längen a, b muß von unserem Standpunkte aus als die Seite des Quadrates betrachtet werden, das mit dem Rechteck aus den beiden Seiten a, b flächengleich ist. Kann man das geometrische Mittel konstruieren, so weiß man auch das einem gegebenen Rechteck äquivalente Quadrat zu finden. Man kann also auch das einem Dreieck äquivalente Quadrat konstruieren. Die Seitenlänge des Quadrats ist das geometrische Mittel zwischen der Hälfte der Basis und der Höhe. Andererseits ist es auch leicht, das einem Vieleck äquivalente Dreieck zu finden.

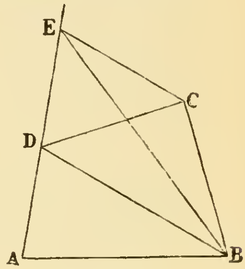


Fig. 63.

Beschränken wir uns darauf, ein Viereck $ABCD$ zu betrachten. Dieses Viereck ist die Summe**) der Dreiecke ADB, DCB. Wenn wir durch C zur Diagonale BD eine Parallele ziehen bis zum Schnittpunkt E mit der Verlängerung von AD, so ist es klar, daß die beiden Dreiecke BDC, BDE flächengleich sind, weil sie dieselbe Basis haben und ihre Höhen, d. h. die Entfernungen der Punkte C, E zu der Diagonale, gleich sind. Das Viereck $ABCD$ ist also mit dem Dreieck ABE flächengleich, welches letztere gleich ist der Summe der Dreiecke ABD und BDE. Man kann also jetzt auch ein Quadrat konstruieren, das einem Viereck flächengleich ist.

199. Nach diesen Erörterungen kommen wir zu folgendem Problem: Es sollen zwei Strecken, deren Summe und deren Produkt bekannt sind, gesucht werden. Man will damit sagen, daß die Summe dieser Strecken einer gegebenen Strecke gleich ist, und daß das Rechteck, das man mit diesen zwei Strecken konstruieren kann, einem gegebenen Rechteck oder Quadrat äquivalent sei: mit anderen Worten, man gibt das geometrische Mittel l der beiden Strecken, die man suchen will, an.

*) Der Leser hat sicher die klassische Konstruktion der Tangente von einem äußern Punkte an einen um AB als Durchmesser beschriebenen Kreis wiedererkannt.

**) Die Wörter „Viereck, Dreieck" bedeuten hier die von den Seiten des Vierecks und Dreiecks eingeschlossenen Flächenteile; das Wort „Summe" erklärt man wie in Nr. 151.

Es seien OA und OB diese beiden Strecken. Wir tragen sie auf eine und dieselbe Gerade auf, und zwar so, daß die Punkte B und A auf die nämliche Seite von O zu liegen kommen. O ist ein beliebiger Punkt. Ist M die Mitte der Punkte A, B, so kennen wir die Länge OM; diese ist nämlich gleich der halben Summe von OA und OB. Wir kennen ferner eine Strecke l, deren Quadrat gleich ist dem Rechteck $OA \times OB$, oder $OM^2 - BM^2$. Man kann also eine Strecke konstruieren, welche gleich BM ist; diese Strecke ist die Kathete CM eines in C rechtwinkeligen Dreiecks, dessen andere Kathete $OC = l$ ist und das OM zur Hypotenuse hat. Man erhält den Punkt C, wenn man um OM als Durchmesser einen Halbkreis schlägt und dann den Schnittpunkt dieses Kreises mit einem Kreise vom Radius l und Mittelpunkt O nimmt. Die Punkte B und A erhält man, wenn man auf MO von M aus zwei MC gleiche Längen MA, MB nimmt. Auf diese Art und Weise erhält man die Strecken OB, OA, die man sucht. — Damit das Problem möglich sei, muß l kleiner als OM sein, kleiner also als die Hälfte der angegebenen Summe.

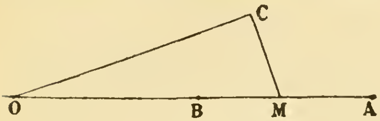


Fig. 64.

200. Zwei Strecken, deren Differenz und deren Produkt bekannt sind, sollen gesucht werden; man nimmt an, dieses Produkt sei gegeben durch die Seitenlänge l eines Quadrates, das dem Rechteck der beiden Strecken flächengleich ist.

Nehmen wir an, OA, OB seien diese Strecken. Wir tragen sie auf eine Gerade auf, gerade wie im vorhergehenden Beispiel, und betrachten OA als die größere. Man kennt die Länge der Strecke AB, Differenz von OA und OB und folglich auch die Länge der Hälfte MA oder MB dieser Differenz. Man kennt ferner die Länge einer Strecke l, deren Quadrat gleich ist $OA \times OB$ oder $OM^2 - BM^2$. Man kann also eine Strecke konstruieren, welche OM gleich ist, nämlich die Hypotenuse DM eines in B rechtwinkeligen Dreiecks MBD, wovon eine Kathete BM ist und die andere BD gleich l ist. Legt man die Länge MD auf die Gerade AB in MO nieder, so erhält man den Punkt O, und die beiden Strecken, die man sucht, sind OA und OB. Dieses Problem ist immer möglich.

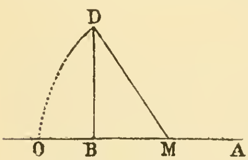


Fig. 65.

201. Gehen wir jetzt zu Problemen über, wo die Angaben und die Unbekannten Zahlen sind. Wir setzen aber immer voraus, diese Zahlen seien positiv und die Operationen im arithmetischen Sinne möglich. In Nr. 147, 148 haben wir gesehen, wie die Konstruktion des geometrischen Mittels oder eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen zwei Katheten man kennt, es erlaubt, die Zahlen $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$, wo a, b ganze Zahlen oder Brüche darstellen, zu finden; natürlich mit einer Annäherung, wie sie die Messungen und das Zeichen zulassen.

Betrachten wir nun das Problem, das dem aus Nr. 199 entspricht: Es sollen zwei Zahlen, deren Summe S und deren Produkt P bekannt sind, gesucht werden.

Stellt x die eine dieser Zahlen dar, so ist die andere $S-x$, und das Aufsuchen der Unbekannten x ist auf die Lösung der Gleichung

$$x(S-x)=P$$

oder auch

$$x^2-Sx+P=0$$

zurückgeführt.

Es ist dies eine *Gleichung zweiten Grades*. Einerseits ermöglicht die Konstruktion aus Nr. 199 ihre Lösungen oder Wurzeln mit einem gewissen Grade von Annäherung zu finden, andererseits erhält man auch leicht den algebraischen Wert dieser Wurzeln. Blickt man zurück auf die Figur von Nr. 199, wo OA und OB die Summe S und das Produkt P darstellen, so sieht man, daß die Maßzahl von OM gleich $\frac{S}{2}$ und die von OC gleich $\sqrt{P}$ ist, da ja das Quadrat von OC durch die Zahl P gemessen wird. Ferner ergibt das in C rechtwinkelige Dreieck OMC

$$\overline{MC}^2=\overline{OM}^2-\overline{OC}^2=\left(\frac{S}{2}\right)^2-P=\left(\frac{S^2}{4}\right)-P{*}),$$

folglich

$$MC=MB=MA=\sqrt{\frac{S^2}{4}-P}$$

und schließlich

$$OA=OM+MA=\frac{S}{2}+\sqrt{\frac{S^2}{4}-P},$$

$$OB=OM-MA=\frac{S}{2}-\sqrt{\frac{S^2}{4}-P}.$$

---

*) Damit das zweite Glied einen Sinn habe, nimmt man an:

$$\frac{S^2}{4}\geq P.$$

Der Leser kann die Probe machen; er wird finden, daß obige Gleichung für beide Werte von x richtig ist. Das Problem, das darin besteht, zwei Zahlen zu suchen, deren Differenz und Produkt man kennt, gibt zu ähnlichen Bemerkungen Anlaß.

Man sieht, daß die in Nr. 199 und 200 behandelten Konstruktionen der Auflösung von Gleichungen zweiten Grades entsprechen, und man versteht alsdann, wie es den Alten möglich war, mittels dieser und ähnlicher Konstruktionen eine Menge Fragen zu beantworten, die man heute mit Algebra auflöst.

III. Kapitel.

Gleichungen zweiten Grades.

202. Wir wollen uns nun der algebraischen Lösung der Gleichung zweiten Grades zuwenden. Die Einschränkungen, die wir im vorigen Kapitel machten, indem wir nur positive oder vielmehr absolute Zahlen in Betracht zogen und die Operationen nur im arithmetischen Sinne als möglich annahmen, lassen wir jetzt fallen.

In Nr. 134 haben wir gesehen, daß eine Gleichung zweiten Grades folgende Form hat:

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

a, b, c stellen gegebene Zahlen dar, jedoch darf a nie Null sein. Das Problem besteht darin, für x diejenigen Werte zu suchen, für die das Trinom $ax^2 + bx + c$ gleich Null wird. Da a von Null verschieden ist, kann man diesen Ausdruck auch folgendermaßen schreiben:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Dieser Ausdruck ist nur Null, wenn der Faktor $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ ist. In anderen Worten, die Gleichung (1) kann, wie man in Nr. 132 gefunden, durch die Gleichung

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ersetzt werden.

Setzt man, um abzukürzen,

$$p = \frac{b}{a}, \qquad q = \frac{c}{a},$$

so müssen p und q als gegeben gelten, da sie sich durch allgemein bekannte Operationen aus den Angaben a, b, c ableiten lassen, und die Auflösung unserer Gleichung (1) ist auf die Lösung der Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \tag{2}$$

zurückgeführt.

203. Nehmen wir zuerst eine Gleichung von der Form

$$x^2 = A,$$

in welcher A eine gegebene Zahl darstellt. Es ist dies eine Gleichung vom Typus (2), worin $p = 0$ und $q = -A$ ist. Man hat hier folgende Aufgabe zu lösen: Welches ist die Zahl x, die A zum Quadrat hat?

Das Quadrat einer relativen Zahl x von beliebigem Vorzeichen ist gemäß Nr. 120 gleich dem Quadrate des absoluten Wertes dieser Zahl. Dieses Quadrat ist also immer positiv oder Null. Das Problem wird also unmöglich, sobald die gegebene Zahl A negativ wird. Ist $A = 0$, so ist notwendigerweise auch $x = 0$, denn nur die Zahl 0 hat 0 zum Quadrat. Die Gleichung $x^2 = 0$ läßt also nur eine einzige Lösung $x = 0$ zu.

Nehmen wir A positiv. Das Quadrat des absoluten Wertes von x muß gleich A sein. Dieser absolute Wert kann alsdann nur die Quadratwurzel von A, im Sinne der Arithmetik, sein. Es ist dies die positive Zahl, die man durch $\sqrt{A}$ darstellt, und welche die Regeln der Arithmetik mit einem beliebigen Grade von Annäherung auszurechnen erlauben. x kann also nur gleich $+\sqrt{A}$ und $-\sqrt{A}$ sein. Umgekehrt ist das Quadrat dieser beiden Zahlen gleich A. Die Gleichung $x^2 = A$ läßt also bei positivem A zwei Lösungen (oder Wurzeln) zu, nämlich $x = +\sqrt{A}$ und $x = -\sqrt{A}$. Z. B. die Gleichung $x^2 = 4$ hat die zwei Wurzeln $x = 2$, $x = -2$.

204. Was das Symbol $\sqrt{A}$ betrifft, so seien folgende Bemerkungen gestattet. Wie schon gesagt, wenden wir es in der Bedeutung an, die ihm die Arithmetik beilegt. Wir verstehen immer eine positive Zahl darunter, ausgenommen den Fall, wo $A = 0$ ist, wo dann auch $\sqrt{A} = 0$ ist. Das Symbol $\sqrt{A}$ hat keinen Sinn mehr, wenn A negativ ist. Sind in der Arithmetik die Quadrate zweier Zahlen gleich, so kann man sagen, daß auch diese Zahlen die nämlichen sind: Die Algebra dagegen behauptet, nur ihre absoluten Werte seien gleich; es bleibt dann noch zu untersuchen, ob die Vorzeichen dieser Werte auch gleich sind oder nicht. In anderen Worten: Hat man die Gleichung $x^2 = a^2$, so kann man nur sagen, x sei gleich entweder $+a$ oder $-a$. Ferner müssen wir bemerken, daß man übereingekommen ist, zu schreiben $\sqrt{a^2} = a$, oder $\sqrt{a^2} = -a$, je nachdem a positiv oder negativ ist.

Sind A und B positive Zahlen, so ist dies auch der Fall für die Zahlen $A \cdot B$, $\frac{A}{B}$; und man hat

$$\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}, \quad \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}};$$

denn in jeder dieser zwei Gleichheiten sind die Quadrate der zwei Glieder gleich. Um nämlich das Produkt zweier Faktoren oder einen Bruch ins Quadrat zu erheben, erhebt man beide Faktoren resp. die zwei Glieder des Bruches ins Quadrat. In beiden Gleichungen sind die zwei Glieder positiv. Man hat z. B.

$$\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} = 2\sqrt{2}, \quad \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

205. Nehmen wir jetzt eine Gleichung der zweiten Form (2), z. B. die Gleichung

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Ist x eine Lösung dieser Gleichung, so muß $x^2 - 2x - 3 = 0$ sein, und man kommt zu folgenden Gleichungen:

$$x^2 - 2x = 3,$$
$$x^2 - 2x + 1 = 3 + 1,$$
$$(x - 1)^2 = 4.$$

Ist also x eine Lösung der in Frage stehenden Gleichung, so kann man sicher sein, daß $(x - 1)^2$ gleich 4 ist. Ist umgekehrt x eine Zahl von solchem Wert, daß $(x - 1)^2$ oder $x^2 - 2x + 1$ gleich 4 ist, so ist $x^2 - 2x$ gleich 3, und folglich ist der Wert $x^2 - 2x - 3$ gleich Null. Unsere Gleichung ist also verifiziert.

Wenden wir die Ausdrucksweise aus Nr. 132 an, so sagen wir: die zwei Gleichungen

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$
$$(x - 1)^2 = 4$$

sind äquivalent, d. h. die Lösungen der ersten genügen auch der zweiten und umgekehrt. In anderen Worten: Diese zwei Gleichungen haben dieselben Lösungen. Dies folgt übrigens aus einem Lehrsatz aus Nr. 132, den man hier zweimal nacheinander angewandt und von neuem bewiesen hat. Der Leser kann das vorhergehende Räsonnement an der allgemeinen Gleichung der nächsten Nummer wiederholen. Dort werden wir uns ohne weiteres des eben erwähnten Begriffes „äquivalenter Gleichungen" bedienen.

Unser Problem läßt sich also darauf zurückführen, eine Zahl x zu suchen, von solchem Werte, daß $(x - 1)^2 = 4$ sei. Damit dies zutreffe, ist es notwendig und hinreichend, daß $x - 1$ gleich 2 oder -2 sei. Damit $x - 1 = 2$ sei, ist es notwendig und hinreichend, daß x

gleich $2+1=3$ sei; für $x-1=-2$ muß aber x gleich $-2+1$ oder gleich -1 sein. Die gegebene Gleichung hat also als Lösungen $x=3$ und $x=-1$; andere Werte für x läßt sie nicht zu.

206. Betrachten wir jetzt die allgemeine Gleichung

(2) $$x^2+px+q=0,$$

wo p und q gegebene Werte sind.

Diese Gleichung hat denselben Wert wie die Gleichung

(3) $$x^2+px=-q,$$

welche man erhält, indem man q auf die zweite Seite bringt. Das Binom (x^2+px) kann man ansehen als die zwei ersten Glieder des Quadrates von $x+\frac{p}{2}$: denn

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+2\,\frac{p}{2}\,x+\left(\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\left(\frac{p^2}{4}\right).$$

Die Gleichung (3) ist der Gleichung

(4) $$x^2+px+\left(\frac{p^2}{4}\right)=\left(\frac{p^2}{4}\right)-q$$

gleichwertig. Diese letztere erhält man, indem man zu beiden Seiten $\frac{p^2}{4}$ hinzufügt; (3) ist ferner identisch mit der Gleichung

(5) $$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q,$$

welche nur eine andere Schreibweise von (4) ist. Die Gleichungen (2) und (5) sind also äquivalent, und das Problem besteht darin, eine Zahl $x+\frac{p}{2}$ zu suchen, die $\frac{p^2}{4}-q$ zum Quadrat hat.

Ist $\frac{p^2}{4}-q$ negativ, so ist das Problem unmöglich, und weder die Gleichung (2) noch (5) hat eine Lösung, denn eine Zahl mit negativem Quadrat ist nicht denkbar.

Ist $\frac{p^2}{4}-q=0$, so muß auch $x+\frac{p}{2}=0$ sein, was zutrifft für $x=-\frac{p}{2}$. Die Gleichung (2) hat also $x=-\frac{p}{2}$ als Lösung, und zwar ist dieses ihre einzige Lösung.

Ist $\frac{p^2}{4}-q$ positiv, so muß das Quadrat von $x+\frac{p}{2}$ diesem positiven Werte gleich sein. Dazu ist aber notwendig und hinreichend, daß $x+\frac{p}{2}$ gleich sei einer der beiden Zahlen

$$+\sqrt{\frac{q^2}{4}-q}\,; \quad -\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,.$$

Hieraus folgt für x:

$$x' = -\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,; \quad x'' = -\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,;$$

die Gleichungen (5) und folglich auch (2) haben diese zwei Zahlen als Lösungen; einen anderen Wert lassen sie nicht zu.

Wenn die Gleichung (2) so beschaffen ist, daß $\frac{p^2}{4}-q$ positiv ist, so läßt sie zwei Lösungen zu, welche voneinander verschieden sind und durch obige Formeln ausgedrückt werden. Wird $\frac{p^2}{4}-q=0$, so sind diese Formeln noch richtig, denn sie geben beide den einen Wert $-\frac{p}{2}$, für welche die Gleichung richtig ist. Man sagt alsdann, die Gleichung (2) habe zwei „gleiche“ Wurzeln oder eine „doppelte“ Wurzel. Die Gleichung (2) läßt keine Lösung zu, wenn $\frac{p^2}{4}-q$ negativ ist.

207. Beispiele:

1.
$$x^2-3x+2=0,$$
$$p=-3, \quad q=2,$$
$$\frac{p^2}{4}-q=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$
$$x'=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2\,; \quad x''=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1\,.$$

2.
$$3x^2+5x-2=0,$$
$$p=\frac{5}{3}\,; \quad q=-\frac{2}{3},$$
$$\frac{p^2}{4}-q=\frac{25}{36}+\frac{2}{3}=\frac{49}{36}=\left(\frac{7}{6}\right)^2,$$
$$x'=\frac{1}{3}\,; \quad x''=-2\,.$$

3.
$$x^2+2x-1=0,$$
$$p=2, \quad q=-1,$$
$$\frac{p^2}{4}-q=1+1=2,$$
$$x'=-1+\sqrt{2}, \quad x''=-1-\sqrt{2}\,.$$

4.
$$3x^2 - 7x + 12 = 0,$$
$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{49}{36} - \frac{12}{3} = -\frac{95}{36};$$

$\frac{p^2}{4}$ ist negativ; die Gleichung hat also keine Lösung.

5.
$$9x^2 - 6x + 1 = 0,$$
$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{1}{9} = \frac{1}{9} = 0,$$

die Gleichung hat eine doppelte Wurzel $x = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

6.
$$x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta = 0,$$
$$p = -(\alpha + \beta), \qquad q = \alpha\beta,$$
$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}{4} = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2.$$

Setzen wir $\alpha > \beta$, so hat man $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{\alpha - \beta}{2}$ und folglich,
$$x' = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} = \alpha, \qquad x'' = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} = \beta.$$

Nimmt man $\alpha < \beta$, so finden wir $x' = \beta$, $x'' = \alpha$; die Wurzeln bleiben also die nämlichen.

208. Betrachtet man $\frac{p^2}{4} - q$ als positiv oder Null, so geben die Formeln
$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

welche die Wurzeln der Gleichung (2)
$$x^2 + px + q = 0$$

darstellen, zu folgenden Bemerkungen Anlaß.

Man hat nämlich
$$x' + x'' = -p.$$

Setzen wir ferner für den Augenblick $R = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, so erhält man
$$x'x'' = \left(-\frac{p}{2} + R\right)\left(-\frac{p}{2} - R\right) = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - R^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q$$

und folglich
$$x'x'' = q.$$

Die Summe der Wurzeln ist gleich $-p$, ihr Produkt q.

209. Diese Bemerkung, welche eine Menge Schlußfolgerungen zuläßt, gibt uns das Mittel in die Hand, eine Gleichung zweiten Grades aufzustellen, die zwei vorher angegebene Wurzeln α, β als Lösungen hat. Nach dem eben Gesagten kann dies nur die Gleichung

$$x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta = 0$$

sein.

Ferner zeigt uns das Beispiel 6. aus Nr. 207, daß die Wurzeln dieser Gleichung α und β sind. Übrigens ist es auch ohne die vorhergehende Theorie nicht schwer, eine Gleichung zu finden mit den Wurzeln α und β. Augenscheinlich ist dies der Fall für die Gleichung

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0,$$

da ja ein Produkt von zwei Faktoren Null ist, wenn einer dieser beiden Faktoren Null ist; übrigens ist auch nur in diesem Falle das Produkt Null. Doch diese Gleichung unterscheidet sich in nichts von der vorhergehenden, denn wenn man die angedeuteten Operationen ausführt, findet man

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta.$$

210. Es sollen zwei Zahlen, deren Summe S und deren Produkt P bekannt sind, gesucht werden. Diese zwei Zahlen sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - Sx + P = 0;$$

wir haben hier dieselbe Gleichung wie in Nr. 101, wo wir das Problem direkt in Form einer Gleichung brachten. Die allgemeinen Formeln zeigen, daß das Problem nur möglich ist, wenn $\frac{S^2}{4} - P$ positiv oder Null ist, und daß in diesem Falle die beiden Zahlen

$$x' = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}, \qquad x'' = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}$$

sind.

Wäre die Konstruktion aus Nr. 199 uns unbekannt, so würden uns diese Formeln darauf führen, und zwar um folgendes Problem zu lösen: Welches sind die Längen zweier Strecken, wenn ihre Summe gleich ist einer anderen bekannten Strecke und wenn ihr Produkt ebenfalls angegeben ist, und zwar unter der Form der Seitenlänge l eines Quadrates, das dieselbe Fläche hat wie das Rechteck der beiden gesuchten Strecken? S kann nämlich als Maßzahl der gegebenen Strecke angesehen werden, und diese Strecke ist gleich der Summe der gesuchten Strecken. Es sei OM die Hälfte dieser gegebenen Strecke, so daß $\frac{S}{2}$ die Länge OM mißt; man muß alsdann eine Strecke konstruieren von der Länge $\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$ oder vielmehr $\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - l^2}$. Es ist dieses die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks OMC, das OM als Hypotenuse und l als zweite Kathete hat; alsdann braucht man nur mehr MC zu OM hinzuzufügen und es davon abzuziehen. Auf diese Weise findet man die beiden Strecken OA und OB, die man sucht.

211. Hier konnten wir sehen, wie die geometrische und die algebraische Lösung übereinstimmten. Das Problem, in dem es sich darum handelt, zwei Zahlen oder zwei Strecken zu finden, wenn man ihren Unterschied D und ihr Produkt P kennt, gibt zu ähnlichen Bemerkungen Anlaß. Vom Standpunkt der Algebra aus besteht übrigens zwischen dieser Aufgabe und der vorhergehenden kein Unterschied, denn der Unterschied zweier Zahlen kann hier als Summe der ersten und des symmetrischen Wertes der zweiten aufgefaßt werden. Nimmt man also als Unbekannte die erste der beiden Zahlen und die zweite mit verändertem Vorzeichen, so ist die Summe der beiden neuen Unbekannten D und ihr Produkt $-P$. Diese neuen Unbekannten sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - Dx - P = 0,$$

daher

$$x' = \frac{D}{2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + P}, \qquad x'' = \frac{D}{2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + P},$$

und die beiden Zahlen, die man sucht, sind

$$x_1 = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + P} + \frac{D}{2}, \qquad x_2 = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + P} - \frac{D}{2}.$$

Nehmen wir an, D bedeute eine Länge und P das Quadrat l^2 einer anderen Länge, so führen die Ausdrücke x_1 und x_2 leicht zur Konstruktion von zwei Strecken, welche die Längen x_1 und x_2 haben.

212. Das Vorhergehende genügt, um zu zeigen, inwiefern man behaupten kann, daß die Alten die Gleichungen des zweiten Grades zu lösen verstanden. Die griechischen Geometer wußten aus dieser geometrischen Algebra, von der ich hier nur die Grundprinzipien gebe, sehr großen Nutzen zu ziehen. Ihr haben sie es zu verdanken, daß sie im Studium gewisser Kurven sehr weit vorgedrungen sind, und zwar durch Verfahren, die wir in unserer analytischen Geometrie im Prinzip wiederfinden. Zu bemerken ist nur, daß, wo wir von Verhältnissen zwischen Zahlen sprechen, die Alten Eigenschaften von „*Figuren*“ annahmen. Das Verfahren jedoch, das wir im vorhergehenden Kapitel erörtert haben, ist sehr begrenzt. Denn die ebene Geometrie erlaubt uns zwar, auf einfache Weise das Produkt zweier Strecken (als Fläche eines Rechtecks nämlich) darzustellen, und die Geometrie des Raumes führt uns in dem Volumen eines rechtwinkligen Parallelipipeds eine greifbare Definition des Produkts dreier Strecken vor Augen; diese Definition erlaubt uns, die Gleichungen (4) und (5) aus Nr. 179 leicht geometrisch auszulegen. Es ist uns jedoch bei unserer Auffassung des Raumes unmöglich, auf ähnliche Weise auch das Produkt von vier, fünf . . . Strecken zu deuten; dasselbe ist der Fall für die Identitäten der Form (10) aus Nr. 183.

Andererseits erlaubt die Anwendung von „*relativen Zahlen*“, in einem einzigen Satze Fälle zusammenzufassen, die man sonst getrennt behandeln müßte, deren Analogie man vielleicht ahnt, deren Identität man aber nicht einsieht. Beschränkt man sich auf das Verfahren der geometrischen Algebra, so muß man die Figurenzahl zu vergrößern suchen. Die Verwendung der algebraischen Schreibweise, anstatt dieser Figuren, war gewiß ein Fortschritt, aber solange man nur mit positiven (oder vielmehr absoluten) Zahlen hantierte, blieb die Notwendigkeit bestehen, eine Menge von Fällen zu unterscheiden. In der Einleitung und in dem ersten Kapitel haben wir nachzuzeigen versucht, eine wie große Allgemeinheit die Anwendung von relativen Zahlen den Sätzen und Formeln gegeben hat. Hier also mag es genügen, nur von den Gleichungen zweiten Grades zu reden. Hält man sich an die absoluten Zahlen, so muß man drei Arten von Gleichungen unterscheiden:

$$x^2 - px + q = 0, \quad x^2 - px - q = 0, \quad x^2 + px - q = 0,$$

und sie nacheinander behandeln. Von der Gleichung

$$x^2 + px + q = 0,$$

die keine Lösung hat, wenn x, p, q absolute Werte haben, wollen wir nicht reden. Übrigens werden die folgenden Kapitel uns diese Verallgemeinerung noch klarer zeigen. Je mehr die Wissenschaft sich heranbildet, desto eifriger das Streben nach Allgemeinheit. Diese Allgemeinheit drängt sich immer mehr auf, je mehr die Wissenschaft sich entwickelt, oder vielmehr diese kann sich nur entwickeln dank der beständig zunehmenden Verallgemeinerung. Der Mathematiker wünscht sie um jeden Preis, aber manchmal sind es nur außerordentliche Mittel, die ihm dieselbe gestatten. Zu wiederholten Malen war er gezwungen, neue Zeichen, bis dahin unbekannte Symbole einzuführen, und zwar mit Erfolg. Denn viele Probleme, die vorher einer Lösung harrten, wurden jetzt erst möglich, und selbst lang bekannte Resultate erlangten eine bedeutende Ausdehnung.

In gewisser Hinsicht kann man die Brüche, die irrationalen und die negativen Zahlen als von der ganzen Zahl allein herkommend betrachten. Bis jetzt haben wir sie dargestellt, als hätten sie einen konkreten Ursprung, als erlaubten sie, stetige Größen zu versinnbilden, oder auch Größen, die fähig sind, in entgegengesetzter Richtung gezählt zu werden. Man kann sie aber auch von einem anderen ganz abstrakten Standpunkte aus betrachten.

Beschränkt man sich auf die Betrachtung ganzer Zahlen, so scheint das Auffinden einer Zahl, die mit 5 multipliziert 12 ergibt, für unmöglich. Erst das Einführen des Symbols $\frac{12}{5}$ ermöglichte die Lösung dieses Problems. Dank den Definitionen, welche die Gleichheit zweier Brüche betreffen, sowie den Operationen, die man an Brüchen vollzog, schaffte man eine neue Klasse von Zahlen, welche die ganzen Zahlen einschließt und die Operationen, denen man diese unterziehen konnte, beibehält.

Auf die Theorie der irratonalen Zahlen, die ich an anderer Stelle nur flüchtig berührt habe, können wir hier nicht eingehen. Aber auch diesen kann man eine rein arithmetische Basis unterschieben und ein Problem folgender Art als ihren Ausgangspunkt ansehen: Welches ist die Zahl, die 2 zum Quadrat hat? Mit ganzen Zahlen und Brüchen allein ist diese Aufgabe nicht zu lösen.

Hält man sich nur an absolute Zahlen, so ist es unmöglich, eine Zahl zu finden, die mit 5 eine Summe $= 3$ ergibt. Erst die Einführung der negativen Zahlen ermöglicht dieses Problem; und Dank der angenommenen Definition bleiben die Grundoperationen auch für die relativen Zahlen bestehen.

Für den Fall endlich, wo $\frac{p^2}{2} - q$ negativ ist, ist es unmöglich, mittels der relativen Zahlen die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

zu lösen. Zur Lösung dieses Problems schuf man die sogenannten „imaginären“ oder die „komplexen“ Zahlen, welche die reellen Zahlen als Spezialfall enthalten, geradeso wie die Brüche die ganzen Zahlen enthalten. Diese Zahlen bestehen aus zwei reellen Zahlen, gerade wie die Brüche aus zwei ganzen. Die Gleichheit von zwei imaginären Zahlen und die Operationen, denen man sie unterwerfen konnte, hat man auch definieren können unter Beibehaltung der Grundoperationen der Arithmetik, und die Algebra erhielt durch sie eine außerordentliche Ausdehnung. In allen Teilen der Mathematik treten sie auf und spielen selbst in der Geometrie, was man anfangs nicht geglaubt hätte, eine der hervorragendsten Rollen. Daß das Einführen solcher Zahlen nicht willkürlich ist, geht zur Genüge aus ihren Erfolgen hervor.

IV. Kapitel.

Die Koordinaten.

213. Nehmen wir eine gerade Linie und wählen wir 1. eine Längeneinheit, 2. eine positive Richtung auf dieser Geraden, 3. einen Punkt dieser Linie, den wir „Nullpunkt“ nennen. In Nr. 75 sahen wir, daß alsdann jeder Punkt dieser Linie einer gewissen relativen Zahl entspricht, die man „Abszisse“ dieses Punktes nennt; umgekehrt entspricht auch jede Zahl einem Punkte. Die positive Richtung der X-Achse ist durch einen Pfeil angedeutet, der von links nach rechts geht.

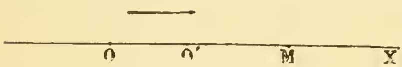


Fig. 66.

Ist O der Nullpunkt, so ist die Abszisse des Punktes M, welche man durch das Zeichen $\overline{OM}$ darstellt, der absolute Wert der Zahl, welche die Länge OM mit der gewählten Längeneinheit mißt. Diese Zahl hat das Vorzeichen + oder —, je nachdem die Bewegung von O nach M sich in positiver oder negativer Richtung vollzieht.

Hat man ferner eine Längeneinheit und eine positive Richtung bestimmt, so stellt das Zeichen $\overline{AB}$, wo A und B zwei Punkte einer Geraden sind, die relative Zahl dar, die dem Punkte B entspricht, wenn man A als Nullpunkt betrachtet. $\overline{AB}$ ist der algebraische Wert des „*Vektors*“ AB, der in A seinen Ausgangspunkt hat und in B aufhört.

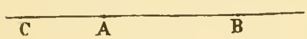


Fig. 67.

Welches auch immer die Lage der Punkte A, B, C sei, so hat man stets gemäß Nr. 85:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}, \qquad \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0\,.$$

Haben die Punkte O', M auf der X-Achse die Abszissen a und x, so hat man bei einer beliebigen Lage der zwei Punkte:

$$\overline{OO'} + \overline{O'M} = \overline{OM}, \qquad a + \overline{O'M} = x,$$

$$\overline{O'M} = x - a\,.$$

Behalten wir also die oben bestimmte positive Richtung und die gewählte Längeneinheit bei und vertauschen wir dagegen den Nullpunkt

O gegen O', so erhalten wir die neue Abszisse des Punktes M, indem wir die alte Abszisse a des neuen Nullpunktes von der alten Abszisse x des Punktes M abziehen.

Auf dieselbe Art und Weise können wir die Zeit bestimmen. Wir wählen nämlich einen Zeitanfang und eine Zeiteinheit und können alsdann jeden Augenblick der Zeitdauer durch seinen Zeitpunkt t bestimmen. Es ist dies die relative Zahl, deren absoluter Wert den Zeitabschnitt mißt, der zwischen dem Zeitanfang und dem in Frage stehenden Augenblick verflossen ist. Diese Zahl hat das Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem dieser Augenblick dem Zeitanfang nachfolgt oder vorhergeht. Vertauscht man ferner den alten Zeitnullpunkt gegen den Punkt t_0, so entspricht dem früheren Zeitpunkt t die neue Zahl $t - t_0$.

214. Die vorausgeschickten Bemerkungen liefern uns eine einfache Regel, in jedem Augenblick die Abszisse eines Punktes zu bestimmen, der sich gleichförmig auf der Achse OX bewegt. Diese Regel wird auf alle Fälle anwendbar sein.

Nach Nr. 99 nennt man *Geschwindigkeit* einer gleichförmigen Bewegung sowohl den *Vektor*, den der bewegte Körper in der Zeiteinheit durchläuft, als auch den algebraischen Wert dieses Vektors. Wir haben auch gefunden, daß, wenn der Körper durch den Nullpunkt im Zeitanfang hindurchgeht, seine Abszisse in jedem Augenblick durch die Formel $x = vt$ geliefert wird.

Lassen wir jedoch diesen Spezialfall für den Augenblick beiseite und nehmen wir vielmehr an, der bewegte Körper befinde sich im Zeitanfang in O'. Ist alsdann M die Stellung des Körpers zur Zeit t, so hat man gemäß dem Vorausgeschickten

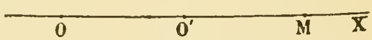


Fig. 68.

$$O'M = vt;$$

hat M als Abszisse x, so hat man übrigens $O'M = x - a$; daraus folgt, daß,

$$x - a = vt, \qquad x = a + vt.$$

Wir haben hier die *Gleichung* der gleichförmigen Bewegung. Sie gestattet uns in jedem Augenblick t, die Abszisse des bewegten Körpers zu berechnen, oder, wie man noch sagt, sie gibt uns die Abszisse als eine *Funktion* der Zeit. In dieser Formel bedeutet a die Stellung des bewegten Körpers im Zeitanfang, v seine Geschwindigkeit.

Es versteht sich von selbst, daß diese Formel erlaubt, eine beliebige der vier Zahlen x, a, v, t zu finden, wenn man die anderen drei kennt.

Bewegt sich, umgekehrt, ein Körper auf einer Achse und zwar so, daß seine Abszisse beständig als Funktion der Zeit durch die Beziehung $x = a + vt$ gegeben ist, wo a und v beliebig gegebene Zahlen sind, so bewegt sich dieser Körper gleichförmig mit einer Geschwindigkeit v.

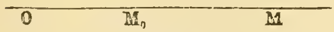


Fig. 69.

Sind nämlich M, M_0 die Stellungen des Körpers zu den Zeiten t und t_0, x und x_0 die entsprechenden Abszissen, so hat man

$$x = a + vt, \quad x_0 = a + vt_0.$$

Subtrahieren wir diese zwei Gleichungen voneinander, so folgt daraus:

$$x - x_0 = a + vt - (a + vt_0) = a + vt - a - vt_0 = v\,(t - t_0).$$

Setzen wir $t > t_0$; $x - x_0$ oder $\overline{M_0 M}$ ist das numerische Äquivalent des Vektors $M_0 M$, den der Körper im Intervall der beiden Zeitpunkte t_0 und t durchläuft. Auf der anderen Seite hat das Produkt $v\,(t - t_0)$ das nämliche Vorzeichen wie v, da ja $t - t_0$ positiv ist. $\overline{M_0 M}$ hat also stets dasselbe Vorzeichen wie v. Nimmt die Zeit zu, so bewegt sich der Körper stets in einer Richtung; in positiver oder negativer, je nachdem v positiv oder negativ ist. Betrachtet man ferner verschiedene Zeitintervalle, in denen aber $t - t_0$ denselben Wert beibehält, so bleibt $\overline{M_0 M}$ gleich groß; anders ausgedrückt: In gleichen Zeitintervallen legt der Körper gleiche Wegestrecken zurück. Die Bewegung ist also gleichförmig. Während des Intervalls einer Zeiteinheit durchläuft der Körper einen Vektor, dessen numerischer Wert der Geschwindigkeit v gleichkommt, da ja gemäß der vorhergehenden Formel $x - x_0 = v$ wird, wenn $t - t_0 = 1$ ist. Man sieht also, daß die Geschwindigkeit des bewegten Körpers v ist.

Die Formel*)

$$x - x_0 = v\,(t - t_0),$$

die wir oben gefunden, ist sehr wichtig. Sie gibt uns in jedem Augenblick t die Abszisse x eines Körpers, der sich gleichförmig mit einer Geschwindigkeit v auf einer Geraden bewegt und zur Zeit t_0 durch den Punkt x_0 hindurchgeht.

Ferner ergibt sie die Formel

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0}.$$

Diese drückt aus, daß man bei der gleichförmigen Bewegung die Ge-

*) Man könnte diese Formel auch aus der Formel $x = vt$ ableiten, indem man den Abszissen- und den Zeitursprung anders wählte.

schwindigkeit erhält, indem man den Unterschied der Abszissen $x - x_0$ zu den Zeitpunkten t, t_0 durch das Zeitintervall $t - t_0$ dividiert.

Die Allgemeinheit der eben gefundenen Formeln zeigt, von wie großem Nutzen die Einführung der negativen Zahlen war. Betrachten wir z. B. die Formel $x = a + vt$. Macht man keinen Gebrauch von den negativen Zahlen, so müßte man, um die Stellung des bewegten Körpers zu berechnen, unterscheiden, ob der Punkt O' rechts oder links von O liegt, ob der Körper sich nach links oder rechts bewegt, ob der in Frage stehende Zeitpunkt dem Zeitanfang vorhergeht oder ihm folgt. Alle Fälle sind in einer einzigen Regel zusammengefaßt.

In dem Vorhergehenden nahm man an, t könne einen beliebigen positiven oder negativen Wert haben, oder, wie man zu sagen pflegt, t könne alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen. Zwar kommen Bewegungen, die unendlich lange dauern, in Wirklichkeit nicht vor, aber nichts kann uns daran hindern, diese Formeln auf eine begrenzte Zeit anzuwenden.

215. Vergleichen wir z. B. die Eisenbahnstrecke Paris-Marseille mit einer geraden Linie. Als Längeneinheit wählen wir das Kilometer; die Richtung Paris-Marseille sei positiv, Paris der Abszissennullpunkt. Wir nehmen ferner die Stunde als Zeiteinheit und 12 Uhr mittags als Zeitanfang. Im Fahrplan 1901 steht ein Zug A, der abends um 7 Uhr in Paris abfährt und morgens um 8 Uhr 55 Minuten in Marseille anlangt. Die Strecke Paris-Marseille beträgt 863 km. Dieser Zug bewegt sich jedoch nicht gleichförmig; an den Stationen z. B. hält er mehrere Minuten, fährt langsam an, seine Geschwindigkeit nimmt allmählich zu, muß aber bei dem nächsten Bahnhofe schon wieder auf Null sinken. Ferner ist diese Geschwindigkeit nicht dieselbe, wenn sich der Zug in einer Ebene oder in steigendem Gelände bewegt. Wir können aber in Gedanken uns einen anderen Zug vorstellen, der gleiche Abfahrtszeit in Paris und gleiche Ankunftszeit in Marseille hat, unterwegs aber immer gleiche Geschwindigkeit besitzt; diesen Zug wollen wir *mittleren* Zug nennen, seine Geschwindigkeit ist die *mittlere* Geschwindigkeit des richtigen Zuges.

Es handelt sich jetzt darum, die Bewegungsgleichung dieses fingierten Zuges zu finden. Zur Zeit 7 ist seine Abszisse 0, während sie 863 beträgt zur Zeit

$$12 + 8 + \frac{55}{60} = 20 + \frac{11}{12}.$$

Seine Geschwindigkeit beträgt also:

$$v = \frac{863 - 0}{20 + \frac{11}{12} - 7} = \frac{863 \cdot 12}{167} = \frac{10356}{167} = 62{,}01\ldots$$

Es ist dies die mittlere Geschwindigkeit des richtigen Zuges. Wendet man nun die Formel $x - x_0 = v\,(t - t_0)$ an, wo t_0 die Abfahrtszeit $+ 7$ des Zuges in Paris bedeutet und $x_0 = 0$ ist, so erhält man für die Bewegungsgleichung,

$$x = \frac{10356}{167}\,(t - 7).$$

Annähernd kann man für x den Wert

$$x = 62\,(t - 7) = 62t - 434$$

nehmen. Man vernachlässigt hierbei höchstens $\frac{2}{100}$ km für die Geschwindigkeit, was bei einem Zeitabschnitt von 14 Stunden für x höchstens einen Fehler von einem halben Kilometer ergibt.

Es versteht sich von selbst, daß diese Formel nur für die wirkliche Fahrzeit Geltung hat; ersetzt man in ihr z. B. $t = 0$, so findet man für $x = -434$, was in unserem Falle keinen Sinn hat.

Unter ähnlichen Bedingungen suchen wir jetzt die Bewegungsgleichung eines zweiten *mittleren* Zuges, der um 6 Uhr 10 Minuten morgens in Marseille abfährt und abends 11 Uhr 25 Minuten in Paris anlangt.

Zur Zeit

$$-6 + \frac{10}{60} = -\frac{35}{6}$$

ist die Abszisse des Zuges $+ 863$; sie ist 0 zur Zeit

$$11 + \frac{25}{60} = \frac{17}{12}.$$

Seine Geschwindigkeit beträgt also

$$\frac{+863 - 0}{-\frac{35}{6} - \frac{137}{12}} = -\frac{863 \cdot 12}{70 + 137} = -\frac{10356}{207}$$
$$= -50{,}029\ldots$$

Die Bewegungsgleichung ist also

$$x = -\frac{10356}{207}\left(t - \frac{137}{12}\right);$$

oder, wenn wir uns mit einem annähernden Wert begnügen:

$$x = 571{,}16 - 50{,}03\,t.$$

Wenn wir von dieser Formel ausgehen, finden wir leicht, daß der *mittlere* Zug in dem 512 km von Paris entfernten Lyon um 1 Uhr

11 Minuten ankommt; in Dijon, dessen Entfernung von Paris 315 km beträgt, um 5 Uhr 7 Minuten. Dem Fahrplan gemäß aber kommt der richtige Zug schon um 12 Uhr 30 Minuten in Lyon an und fährt um 1 Uhr 5 Minnten wieder ab; in Dijon langt er um 5 Uhr 3 Minuten an und fährt um 6 Uhr ab.

216. Wir wollen uns jetzt wieder der theoretischen Formel $x = a + vt$ zuwenden. Dieselbe gestattet die Abszisse x eines Körpers, der sich gleichmäßig auf einer Achse OX bewegt, zu berechnen; t möge einen beliebigen positiven oder negativen Wert annehmen. Nehmen wir ferner an, die positive Richtung auf der Achse gehe von links nach rechts. Nimmt t zu (im Sinne der Algebra), so bewegt sich der Körper stets in derselben Richtung, nach rechts, wenn v positiv ist, nach links, wenn v negativ ist. In beiden Fällen geht er durch den Nullpunkt zur Zeit $t_0 = -\frac{a}{v}$. Im ersten Falle $(v > 0)$ wächst die Abszisse $a + vt$ beständig; im zweiten Falle $(v < 0)$ nimmt sie ab. Ist im ersten Falle t kleiner als t_0 und befindet sich der Körper links vom Nullpunkt, so ist die Abszisse $a + vt$ negativ; sie ist dagegen positiv, wenn t größer ist als t_0. Ist im zweiten Falle t kleiner als t_0 und befindet sich dagegen der Körper rechts von O, so ist seine Abszisse $a + vt$ positiv; sie ist negativ, wenn t größer als t_0 ist.

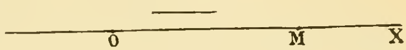


Fig. 70.

Diese Resultate lassen sich auch auf eine von ihrer Auslegung unabhängige Art und Weise ausdrücken. Man kann z. B. sagen, daß der Wert $a + vt$, wo a und v gegebene Zahlen, t aber eine *Veränderliche* darstellen, und den man für jeden Wert von t leicht finden kann, immer mit wachsendem t zu- oder abnimmt, je nachdem v positiv oder negativ ist. Dieser Ausdruck hat das nämliche Vorzeichen wie v, für alle Werte von t, die $t_0 = -\frac{a}{v}$ übersteigen. Für $t_0 = -\frac{a}{v}$ ist $x = a + vt$ Null, dagegen von entgegengesetztem Zeichen wie v, für Werte von t, die kleiner als t_0 sind.

Übrigens lassen diese Resultate sich auch leicht aus der Formel

$$a + vt = v\,(t - t_0)$$

ableiten, in der man t_0 durch $-\frac{a}{v}$ ersetzt.

217. Das Verfahren, gemäß welchem jedem Punkt eine relative Zahl und jeder Zahl ein Punkt entspricht, läßt sich nicht nur auf den Fall anwenden, wo diese Punkte auf einer geraden Linie liegen, sondern auch auf denjenigen, wo die Punkte auf einer Kurve sich befinden.

Nehmen wir z. B. einen Kreis. Auf diesem Kreis wählen wir eine Richtung als positiv oder direkt, diejenige nämlich, welche der Pfeil andeutet, oder die dem Gang eines Uhrzeigers entgegengesetzte Richtung.

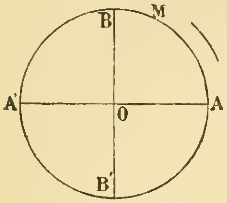


Fig. 71.

Als Längeneinheit des Bogens kann ferner der *Grad* oder der *Zentesimalgrad* dienen, oder auch ein anderer Bogen, den wir unten näher bestimmen wollen. Den Punkt A des Kreises wählen wir als Nullpunkt. Jedem Punkte M, der von dem A diametral entgegengesetzten A' verschieden ist, entspricht eine relative Zahl, gemäß einer Konvention, die wir näher besprechen wollen. Die zwei Punkte A und M teilen den Kreisumfang in zwei Bogen, wovon der eine größer, der andere kleiner als ein Halbkreis ist. Letzteren nennen wir den Bogen AM: Dem Punkte M läßt man die Zahl entsprechen, die AM mit der gewählten Längeneinheit mißt, und zwar mit dem Vorzeichen + oder —, je nachdem man von A nach M sich in positiver oder entgegengesetzter Richtung bewegt. BB' stellt einen auf AA' senkrechten Durchmesser dar; CC' und DD' sind die Durchmesser, welche mit den Winkelhalbierenden der Winkel AOB, BOA' zusammenfallen. Haben die Punkte die Reihenfolge A, C,B, D, A', C', B', D', wenn man die direkte Richtung befolgt, so entsprechen, beim Grad als Einheit, die Zahlen

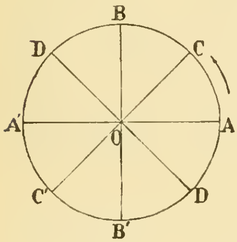


Fig. 72.

$$0,\ 45,\ 90,\ 135,\ \pm 180,\ -135,\ -90,\ -45$$

den verschiedenen Punkten

$$A,\ C,\ B,\ D,\ A',\ C',\ B',\ D'.$$

Nimmt man den Zentesimalgrad als Einheit, so entsprechen den verschiedenen Punkten in derselben Reihenfolge die Zahlen

$$0,\ 50,\ 100,\ 150,\ \pm 200,\ -150,\ -100,\ -50.$$

In beiden Systemen entsprechen zwei Zahlen dem Punkt A', $+180$ und -180 z. B. Dies kommt daher, weil der Punkt A' sich in einem oben erwähnten Ausnahmefall befindet. A' ist dem Nullpunkt diametral entgegengesetzt, und die Regel, welche erlaubt, die beiden von zwei Punkten bestimmten Bogen zu unterscheiden, kann hier nicht angewandt werden, weil hier die beiden Bogen gleich sind. Die Zeichen $\pm$ deuten an, daß man nach A' gelangt, indem man auf den Kreis 180 oder 200 Grad zurücklegt, sowohl in positiver als in negativer Richtung.

Anstatt mit Geraden und Zentesimalgraden kann man einen Bogen auch vermittelst des Radius messen. Hierbei wird die Länge des Bogens gemessen, und zwar mit dem Radius als Längeneinheit. Man nimmt also als Einheit einen Bogen, dessen Länge die Länge des Radius ist*).

Ähnlich wie oben hat die Zahl, welche die Bogenlänge mißt, das Vorzeichen $+$ oder $-$. In diesem System entsprechen den Punkten

$$A,\ C,\ B,\ D,\ A',\ C',\ B',\ D'$$

die Zahlen

$$0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pm\pi,\ -\frac{3\pi}{4},\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4},$$

da ja 2π die Maßzahl der Länge des Kreisumfanges ist.

Jeder positiven oder negativen Zahl, deren absoluter Wert kleiner ist als 180^0 oder 200 Zentesimalgrade oder π Radien, entspricht ein Punkt des Kreises, und zwar nur ein einziger.

Will man von einer Einheit zur andern übergehen, so braucht man sich nur mit den absoluten Werten zu beschäftigen. Die in Nr. 34 und 41 gegebenen allgemeinen Sätze und die Bemerkungen in Nr. 154 ermöglichen die Lösung der verschiedenen Probleme.

Es seien A, B, C die positiven Zahlen, welche einen und denselben Bogen in Graden, Zentesimalgraden und Radien messen. Alsdann erlauben die Relationen

$$C = A\frac{\pi}{180} = B\frac{\pi}{200},$$

zwei der drei Zahlen A, B, C zu finden, wenn man die dritte davon kennt**).

---

*) Diese Bogenlänge entspricht ungefähr einem Bogen von $57^0\ 17'\ 45''$ oder 63,661977 Zentisimalgrad. Man nennt diesen Bogen Radian.

**) Eine kleine Schwierigkeit stellt sich ein, wenn man einen Bogen in Grade, Minuten und Sekunden ausdrücken will. Nehmen wir an, ein Bogen werde mit dem Grad als Einheit durch die Zahl A dargestellt. Man kann alsdann immer annehmen, A sei ein gewöhnlicher oder auch ein Dezimalbruch, denn, wenn A ein irrationaler Bruch ist, kann man beim Rechnen diesen durch einen annähernden Bruch ersetzen. Wenn alsdann a der ganze Teil von A ist, so heißt das, der Bogen setze sich zusammen aus a Geraden und einem Bogen, der kleiner ist als ein Grad (mit dem Grade als Einheit), einem echten Bruch A_0 also. Man hat also $A = a + A_0$. Kennt man A, so kann man a und A_0 finden. Nimmt man die Minute als Einheit, so hat der Bogen, welcher kleiner ist als

218. Um die Lage eines Punktes auf einer Kurve (C) mittelst einer Zahl zu kennzeichnen, kann man auch noch folgende Methode anwenden, deren Allgemeinheit dem Leser leicht einleuchten wird.

Auf der Kurve (C) zeichnen wir Punkte, die in genügend geringem Abstand voneinander entfernt liegen. Einen dieser Punkte wählen wir zum Nullpunkt und bezeichnen ihn mit 0. Ferner nehmen wir eine beliebige Richtung von 0 aus als die positive und bezeichnen die verschiedenen Punkte mit den Nummern 1, 2, 3, 4, ... (oder $+1$, $+2$, $+3$, ...).

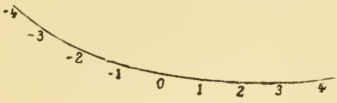


Fig. 73.

Wir kommen alsdann zum Punkte 0 zurück und folgen der Knrve nach der anderen Richtung hin, indem wir die Punkte nach dieser Seite hin mit den Nummern negativen Vorzeichens -1, -2, -3, -4, ... versehen. Jedem der Punkte, die wir so auf der Kurve erhalten haben, entspricht alsdann eine ganze Zahl, die positiv oder negativ sein kann und für den Nullpunkt 0 ist. Jeder Zahl, sei sie positiv, negativ oder Null, entspricht ein Punkt der Kurve, wenn diese Zahl zwischen zwei Grenzen, den äußersten Punkten der Kurve, liegt. Zwar sind noch lange nicht alle Punkte der Kurve mit Nummern bezeichnet, aber alle diese Punkte liegen ziemlich nahe bei einem mit einer Nummer bezeichneten, und die Angabe eines solchen oder vielmehr zweier konsekutiver Punkte, die den in Frage stehenden einschließen, gibt wenigstens *annähernd* die Lage des letzteren. Sind die Abstände der Punkte klein, so kann die Annäherung als genügend gelten. Man kann jedoch noch weiter gehen; zwischen zwei konsekutiven Punkten schieben wir neun andere ein und kennzeichnen diese mittelst der Dezimalzahlen. Z. B. zwischen

---

1^0, den Wert $60\,A_0$. a' sei die ganze Zahl des Bruches $60\,A_0$, so daß man $60\,A_0 = a' + A_1$ hat; a' ist eine ganze Zahl, die kleiner ist als 60, und A_1 ein echter Bruch. Der Bogen, welcher also kleiner als ein Grad ist, zerfällt in einen Bogen von a' Minuten und einen Bogen, der kleiner ist als eine Minute (die Minute als Einheit genommen). Dieser Bogen wird gemessen durch den Bruch A_1. Nimmt man die Sekunde als Einheit, so beträgt letzterer $60\,A_1$; a'' ist die ganze Zahl von $60\,A_1$; man hat also $60\,A_1 = a'' + A_2$. a'' ist kleiner als 60; der Bogen, der kleiner ist als eine Minute, setzt sich zusammen aus einem Bogen von a'' Sekunden und einem zweiten Bogen, der kleiner ist als 1 Sekunde (Sekunde als Einheit) und der dem Bruch A_2 entspricht; der in Frage stehende Bogen selbst hat also a^0, a' Minuten, a'' Sekunden, und man kann sagen:

$$A = a + \frac{a'}{60} + \frac{a'' + A_2}{3600}.$$

In der Berechnung von A hört man bei dem gewünschten Annäherungsgrade auf. Man beschränkt sich auf Grade, Minuten und Sekunden. Nur in sehr genauen Rechnungen nimmt man A_2 als Dezimalbruch mit.

die Punkte 0 und 1 schieben wir die Punkte 0,1; 0,2; 0,3; . . .; 0,9 ein. Die Punkte zwischen 1 und 2 haben die Nummern 1,1; 1,2; 1,3; . . .; 1,9. Zwischen 2 und 3 liegen die Nummern 2,1; 2,2; 2,3; . . .; 2,9. Die neun Punkte zwischen 0 und — 1 tragen die Nummern — 0,1; — 0,2; — 0,3; . . .; — 0,9. Zwischen — 1 und — 2 liegen die Punkte — 1,1; — 1,2; — 1,3; . . .; — 1,9; usw. usw. Auf diese Weise erhält man eine immer größere Annäherung, und dieser Einteilungsmodus kann immer weiter fortgesetzt werden; theoretisch bis ins Unendliche, so daß zwei aufeinanderfolgende Nummern so nahe wie möglich aneinanderliegen, und ein beliebiger Punkt der Kurve durch die zwei ihn einschließenden mit einer beliebigen Annäherung gekennzeichnet wird. Praktisch aber verschwinden die Punkte schon bald ineinander und lassen sich nicht mehr voneinander unterscheiden; der Bogen läßt sich alsdann in kleinere Teile nicht mehr einteilen.

Vergleicht der Leser diese Erörterungen mit denen aus Nr. 70, 75, so sieht er, daß in dem speziellen Fall, wo die Kurve (C) zur Geraden wird und die Punkte — 2, — 1, 0, 1, 2, . . . gleichweit voneinander entfernt sind; wo ferner dieser Abstand gleich der Längeneinheit ist, und die eingeschalteten Punkte auch in gleichweiter Entfernung sich befinden, dieser Nummerierungsmodus schließlich auf die Definition der Abszisse aus Nr. 75 herauskommt.

Wendet man ein ähnliches Verfahren auf den Kreis an, und nimmt man an, jeder Halbkreis ABA', $AB'A'$ sei in 180 gleiche Teile geteilt und trage die Nummern 0 bis 180, und zwar mit positivem Vorzeichen für ABA', mit negativem für $AB'A$, so erhält man die Einteilung in Grade. Anstatt die Grade in zehn gleiche Teile zu teilen, teilt man sie in 60 Minuten und jede Minute wiederum in 60 Sekunden: ein Überbleibsel des Sexagesimalsystems, das bei den Babyloniern im Gebrauch war. Es ist vielleicht unnütz zu sagen, daß der Kreis schon einen ziemlichen Umfang haben muß, wenn die Minuten durch eine dem Auge bemerkbare Länge dargestellt werden sollen. Was die Sekunde anbelangt, so beträgt die Bogenlänge einer Sekunde auf einem Kreise des Erdglobus ungefähr 31 Meter. Stellt man sich vor, ein solcher Kreis sei in Sekunden eingeteilt und diese Einteilungspunkte seien numeriert, so sieht man, daß die Kenntnis zweier aufeinanderfolgender Punkte, die einen beliebigen Dritten einschließen, die Lage dieses Dritten mit einer sehr großen Annäherung zu bestimmen erlaubt.

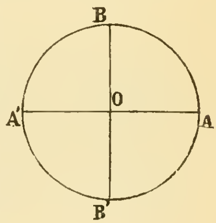


Fig. 74.

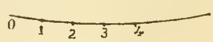


Fig. 75.

Fügen wir noch hinzu, daß eine begrenzte Kurve erlaubt, ohne negative Zahlen zu operieren, da man den Nullpunkt an das eine Ende der Kurve verlegen kann. Diese Nummerierungsart erinnert an diejenigen, die bei den Häusern einer Straße üblich ist.

Bei einem Kreis z. B. kann man den Kreisumfang in 360^0 einteilen und die Punkte von einem beliebigen aus, nur in einer bestimmten Richtung, von $0 - 359^0$ numerieren.

219. Wir kommen jetzt zu der Bestimmung eines beliebigen Punktes einer Ebene mittelst eines Systemes von zwei Zahlen; und zwar wollen wir zuerst in kurzen Worten ein besonderes Verfahren erörtern.

Betrachten wir die zwei rechtwinkeligen Geraden $X'X$, $Y'Y$ einer Ebene, die sich in O schneiden. Wir wählen eine Längeneinheit und auf jeder Geraden eine positive Richtung. Für die erste Gerade ist es die Richtung $X'-X$ (von links nach rechts), für die zweite von $Y'-Y$ (von unten nach oben); der Schnittpunkt O der beiden Geraden, die man gewöhnliche *Koordinatenachsen* nennt, heißt Nullpunkt.

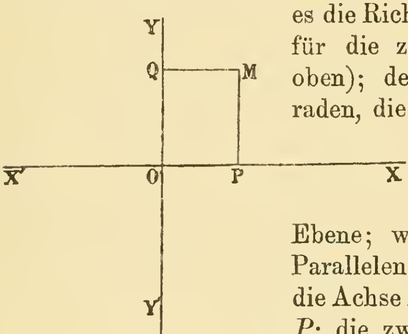


Fig. 76.

Dies vorausgesetzt, betrachten wir einen beliebigen Punkt M der Ebene; wir ziehen durch diesen Punkt die Parallelen zu $Y'Y$, $X'X$. Die erste schneidet die Achse XX' (oder x-Achse) in einem Punkte P; die zweite schneidet die Achse YY' (oder y-Achse) in Q; da die Achsen senkrecht aufeinander sind, kann man auch sagen, P und Q seien die Fußpunkte der Senkrechten, die man durch M auf OY und OX zieht. Man kann die Lage von P auf XX' durch eine relative Zahl bestimmen, durch seine Abszisse nämlich in bezug auf diese Achse, oder wenn man will, durch das algebraische Äquivalent des Vektors OP. Man kann auf gleiche Weise den Punkt Q auf der y-Achse bestimmen durch eine relative Zahl, durch seine Abszisse in bezug auf diese Achse, oder das algebraische Äquivalent des Vektors OQ. Kennt man umgekehrt die Punkte P und Q der Achsen XX' und YY', oder was dasselbe ist, die Abszissen eines jeden dieser Punkte in bezug auf die x-Achse bzw. die y-Achse, so ist M bekannt: M ist der Schnittpunkt der Parallelen zu $Y'Y$ und XX', die man durch P und Q zieht.

In Zukunft wollen wir, wie üblich, den Namen *Abszisse* nur mehr für die Abszissen der x-Achse beibehalten, die der y-Achse werden wir *Ordinate* nennen.

Die *Abszisse* des Punktes M ist also das algebraische Äquivalent $\overline{OP}$ des Vektors OP, seine *Ordinate* dagegen das algebraische Äquivalent $\overline{OQ}$ des Vektors OQ.

Jedem Punkte M der Ebene entsprechen zwei relative Zahlen, seine *Abszisse* und seine *Ordinate*. Ist der Punkt M gegeben, so erhält man diese beiden Zahlen, indem man mit der gewählten Einheit die Längen OP und OQ mißt und die so erhaltenen Zahlen mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$ versieht, je nachdem man, von O nach P und von O nach Q auf den beiden Achsen in positiver oder negativer Richtung gehen muß.

Umgekehrt entspricht jedem Paare von relativen Zahlen, wovon die erste eine Abszisse bedeutet und die zweite eine Ordinate, ein Punkt der Ebene und nur einziger.

Der ersten Zahl, der Abszisse also, entspricht ein Punkt P der x-Achse, der, nach den angenommenen Konventionen sich rechts oder links von O befindet, je nachdem diese Abszisse positiv oder negativ ist. Der zweiten Zahl, der Ordinate, entspricht ein Punkt Q der y-Achse. Dieser Punkt ist ober- oder unterhalb von O, je nachdem diese Ordinate $+$ oder $-$ ist. Der Punkt, der den zwei Zahlen zugleich, dem Paare also, entspricht, ist der Punkt M, Schnittpunkt der Geraden PM, QM, welche man durch P und Q parallel zu den Achsen zieht; seine Abszisse ist die erste, seine Ordinate die zweite der beiden Zahlen, die man angegeben hat*).

Alle Punkte, die auf einer mit der y-Achse parallelen Geraden liegen, haben gleiche Abszisse. Die Abszisse aller Punkte der Geraden PM oder ihrer Verlängerung ist also immer dieselbe, und zwar gleich $\overline{OP}$. Die Ordinate aller Punkte einer Parallelen zur x-Achse bleibt dieselbe; so z. B. haben alle Punkte der Linie QM zur Ordinate $\overline{OQ}$. Die Abszisse aller Punkte der y-Achse ist 0; die Ordinate aller Punkte der x-Achse ist ebenfalls 0.

Die Abszisse und die Ordinate eines Punktes heißen die *Koordinaten* des Punktes. Alle Punkte, die rechts von der y-Achse liegen, haben eine positive, alle Punkte links eine negative Abszisse. Alle Punkte oberhalb der x-Achse haben eine positive, alle unterhalb

*) Obgleich die Koordinaten „*Zahlen*“ sind, ist es doch bequem, wenn keine Verwechselung zu befürchten ist, die Wörter „*Abszisse*“, „*Ordinate*“ anzuwenden, um die *Strecken* zu bezeichnen, welche diese Zahlen messen. Im allgemeinen werden wir diese Ungenauigkeit vermeiden, jedoch nicht immer.

liegenden eine negative Ordinate. Umgekehrt erlaubt das Vorzeichen der Abszisse, zu erkennen, ob der Punkt rechts oder links von der y-Achse liegt, das Vorzeichen der Ordinate aber, ob er oberhalb oder unterhalb der x-Achse sich befindet. Die beiden Koordinaten der Punkte, welche innerhalb XOY liegen, sind positiv; diejenigen der Punkte innerhalb $X'OY'$ sind negativ. Die Punkte innerhalb $Y'OX$ haben positive Abszissen und negative Ordinaten; die Punkte innerhalb $X'OY$ dagegen negative Abszissen und positive Ordinaten. Die Umkehrungen dieser Sätze sind auch richtig.

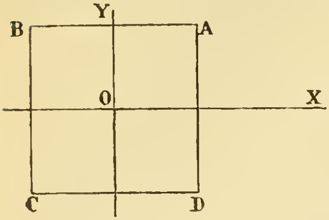


Fig. 77.

Ist z. B. $ABCD$ ein Quadrat, dessen Seiten den Achsen parallel laufen, das O zum Mittelpunkt hat und dessen Seitenlänge gleich der Längeneinheit ist, so sind die Koordinaten der Punkte A, B, C, D für $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, für $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, für $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ und für $D\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

220. Man kann den Begriff der Koordinaten auf eine andere Weise erläutern, die von der vorhergehenden ein wenig abweicht.

Nehmen wir eine Achse XX' mit dem Nullpunkt Q. Diese Achse teilt die Ebene in zwei Teile, wovon der eine *unterhalb*, der andere *oberhalb* derselben liegt. Ferner sei M ein beliebiger Punkt der Ebene und P der Fußpunkt des Lotes, das man von M auf die Achse fällt. Man bestimmt den Punkt P auf der Achse XX' durch seine Abszisse $\overline{OP}$. Kennt man nur diese Abszisse oder den Punkt P, so weiß man nur, daß der Punkt M sich auf der Senkrechten befindet, die man in P auf der x-Achse errichten kann. Auf dieser Geraden wählen wir den Punkt P als Nullpunkt und die Richtung, die von P aus in den oberhalb der X-Achse gelegenen Bereich führt zur positiven Richtung. Wie gewöhnlich, erlaubt uns dann die Zahl $\overline{PM}$, welche nichts anderes als die Ordinate von M ist, die Lage des Punktes M auf dieser Senkrechten festzustellen; diese Ordinate haben wir schon oben besprochen, wenn wir *oberhalb* der x-Achse denjenigen Teil der Ebene nennen, welcher die positive y-Achse einschließt.

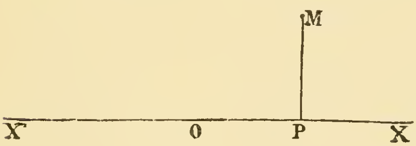


Fig. 78.

Mit anderen Worten: Hat man zwei rechtwinklige Koordinaten-

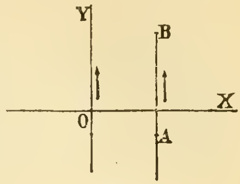


Fig. 79.

achsen, so kann man jede Parallele zur y-Achse als *Achse* betrachten, und zwar hat diese neue Achse dieselbe positive Richtung wie die ursprüngliche y-Achse und dieselbe Längeneinheit. Sind also A und B zwei Punkte einer solchen Parallelen, so ist es immer erlaubt, das Symbol $\overline{AB}$ anzuwenden, um die relative Zahl zu bezeichnen, deren absoluter Wert den Abstand der Punkte A, B mißt. Dieser Wert ist $+$ oder $-$, je nachdem man von A nach B sich in positiver oder negativer Richtung bewegt.

221. Dieser Standpunkt läßt uns sofort erkennen, was man unter Koordinaten eines Punktes im Raume versteht. Der Leser stelle sich eine unbewegliche Ebene im Raume vor, die er der Einfachheit wegen sich horizontal denken kann. Diese Ebene teilt den Raum in zwei Teile, einen oberen und einen unteren; in dieser Ebene denken wir uns zwei rechtwinklige Koordinatenachsen XX', YY'. Dies vorausgeschickt, sei nun M ein beliebiger Punkt des Raumes; durch M führen wir eine Senkrechte auf die genannte Ebene und P sei der Fußpunkt dieses Lotes. Man kann alsdann in der Ebene den Punkt P bestimmen mittelst zweier relativer Zahlen, seiner Abszisse und seiner Ordinate. Diese zwei nämlichen Zahlen gelten auch als Abszisse und Ordinate des Punktes M. Kennt man nun diese zwei Zahlen oder die Lage des Punktes P, so kann man nur sagen, daß der Punkt M sich auf der Senkrechten befindet, die man in P auf der gedachten Ebene errichten kann; wo M gerade auf dieser Linie liegt, weiß man noch nicht. Auf dieser Senkrechten wählen wir den Punkt P als Nullpunkt und die Richtung, die oberhalb der Ebene führt, zur positiven Richtung; M ist alsdann in seiner Lage durch die Zahl $\overline{PM}$ bestimmt, die man *Kote* nennt.

Jedem Punkte des Raumes entsprechen also drei Zahlen; die Abszisse, die Ordinate und die Kote; und umgekehrt entspricht jedem System von drei relativen Zahlen, die man als Abszisse, Ordinate und Kote ansieht, ein Punkt des Raumes, und zwar nur ein einziger.

222. Kehren wir zur Ebene zurück, und zwar in erster Linie zu den rechtwinkligen Koordinaten. Nehmen wir ein Blatt quadratisch geteiltes Papier; es wird von selbst angezeigt sein, dieses Blatt auf ein System rechtwinkliger Koordinatenachsen zu beziehen; jede Achse deckt sich mit einer der beiden Seitenlinien der Quadrate. Man kann die Achsen in die Mitte des Blattes verlegen und die positiven Richtungen wie oben bestimmen; als Längeneinheit wählt man eine Länge, die mit der Seitenlänge der Quadrate in einem einfachen Verhältnis steht. Hat man z. B. sogenanntes *Millimeterpapier*, dessen Quadrat einen *Millimeter* Seitenlänge hat, so kann man als Längeneinheit das Millimeter, das Zentimeter oder das Dezimeter nehmen. Alsdann lassen die verschiedenen Längen auf den Achsen, sowie die den Achsen gleichlaufenden Geraden sich sehr leicht bestimmen. Natürlich erlaubt diese Art und Weise keine sehr genaue Berechnung, denn die Einteilung des Papieres in Quadrate ist noch lange nicht vollkommen; weder die Striche des Papieres noch die darauf gezeichneten Linien und Punkte sind fein genug, um genaue Messungen zu gestatten. Die Behauptung, mit dem bloßen Auge die Entfernung eines Punktes des Blattes zu den Seiten des Quadrates, das ihn einschließt, in Zehntelmillimeter abschätzen zu können, mag dem Leser vielleicht etwas gewagt erscheinen; wir wollen dies nichtsdestoweniger für den Augenblick annehmen. Mit dem Millimeter als Einheit begnügen wir uns in unseren Berechnungen mit einer einzigen Dezimalstelle*), und zu fest dürfen wir uns auf diese Dezimale noch nicht verlassen. Beim Zentimeter und Dezimeter erfordert dagegen derselbe Grad von Genauigkeit Zahlen mit zwei, drei Dezimalen. Im letzteren Falle kann der ganze Teil kaum mehr als eine Stelle haben, es sei denn, daß das Papier sehr große Dimensionen aufweise. Man hat sich also nur solcher Zahlen zu bedienen, welche drei oder vier Stellen haben; die Ziffer der Tausendstel, welche also Zehntelmillimeter darstellt, ist, um es noch einmal zu wiederholen, höchst unzuverlässig. Endlich ist es nicht von großer Bedeutung, ob man für die Längeneinheit das

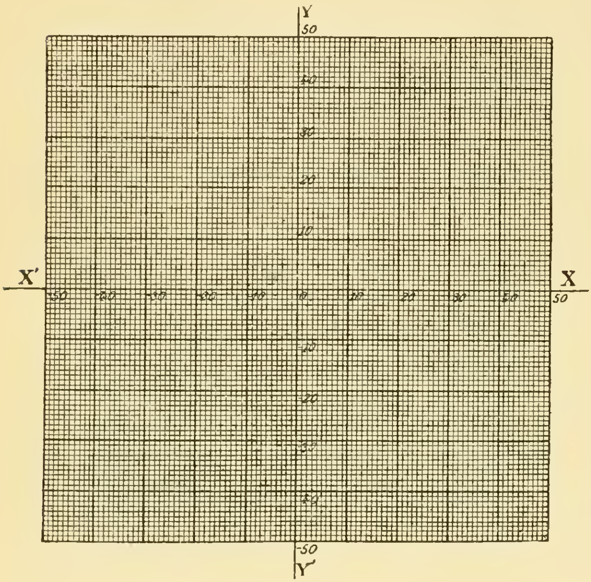


Fig. 80.

*) Es ist ganz natürlich, für diese Ziffer 0 oder 5 zu nehmen, d. h. die Längen mit $^1/_2$ Millimeter Genauigkeit zu messen.

Millimeter, Zentimeter oder Dezimeter nimmt; erlaubt ja doch eine Versetzung des Kommas, von einer Einheit zur anderen überzugehen.

Man kann annehmen, auf der x-Achse seien die Einteilungspunkte vom Nullpunkt aus numeriert, und zwar mit 1, 2, 3, ... nach rechts und mit -1, -2, -3, ... nach links hin. Da der Raum unserer Figur nicht erlaubt, diese Nummern alle zu schreiben, notieren wir bloß die Vielfachen von 10. Die übrigen können wir uns leicht denken. Für die y-Achse tun wir dasselbe. Betrachtet man alsdann einen beliebigen Punkt dieses millimetrischen Netzes, so kann man seine Koordinaten mit Leichtigkeit ablesen, wenn man die Parallele zur y-Achse durchläuft bis zu ihrem Schnittpunkte mit XX', und die Parallele zur x-Achse bis zu ihrem Schnittpunkte mit YY'. Liegt der Punkt im Innern eines der kleinen Quadrate oder auf einer der Seiten, so schätzt man aufs Geratewohl die Kleinigkeit ab, um die man die Koordinaten des nächsten Netzpunktes verbessern muß. Sind umgekehrt zwei Zahlen gegeben, positive oder negative, so findet man sofort den Punkt des Netzes, der die erste Zahl zur Abszisse, die zweite zur Ordinate hat.

Die vorhergehende Seite zeigt uns zwei Koordinatenachsen, welche auf ein Blatt Millimeterpapier gezogen sind. Das Papier dieser Art, das in Frankreich am meisten verbreitet ist und dessen Linien stärker ausgezogen sind, hat zehnmal größere Quadrate, ist also in qcm eingeteilt. Alsdann ist wieder jeder fünfte Strich noch stärker gezeichnet und das Papier auf diese Weise wieder in Quadrate von 25 qcm eingeteilt. Die vorhergehende Figur zeigt vier solcher Quadrate*).

Anstatt die Koordinatenachsen in die Mitte des Blattes zu zeichnen, kann man sie auch an den Rand der Zeichnung verlegen und zum Nullpunkt z. B. die unterste linke Ecke des Randes der Zeichnung wählen. Auf diese Art und Weise erhalten alle Punkte des Blattes positive Koordinaten.

Der Leser bemerkt sogleich, daß eine auf dem Papier gezeichnete Figur bestimmt ist durch die Koordinatensysteme der Punkte, aus welchen sie gebildet ist. Den geometrischen Eigenschaften dieser

*) Für Versuche geringer Präzision bedient man sich eines Papieres, das man in allen Geschäften erhalten kann und das Quadrate von $\frac{1}{2}$ cm Seitenlänge hat. Jedes dieser halben Zentimeter teilt man auf ungefähr wieder ein. — Ist es auch bequem, sich eines Blattes zu bedienen, dessen Untereinteilungen in einfachem Verhältnis zum metrischen System stehen, so ist diese Einteilung jedoch keineswegs nötig, und die Fläche der Quadrate kann eine beliebige sein. Ihre Seitenlänge gibt uns eine bestimmte „*Längeneinheit*“ an die Hand, mit welcher wir leicht eine beliebige Länge auf dem Papier messen können. In der folgenden Nummer studieren wir den Einfluß, den die Änderung der Einheit auf die Figur ausübt.

Figur entsprechen numerische Relationen dieser Koordinaten und umgekehrt. Später kommen wir noch auf diesen Punkt zurück.

Wir wollen jedoch noch auf eine wichtige Bemerkung hier eingehen. Dieselbe betrifft die Änderung der Längeneinheit.

223. Betrachten wir ein Koordinatenachsensystem OX, OY und einen beliebigen Punkt M mit den Koordinaten x, y. Es sei M' der Punkt, den wir durch homothetische Abbildung von M erhalten (Nr. 173). Die positive Zahl k ist das Verhältnis, O das Zentrum der Homothetie: die Koordinaten des Punktes M sind dann kx und ky. Denn wenn P und P' die Punkte sind, wo die Parallelen zur y-Achse die x-Achse schneiden, so entspricht der Punkt P' dem Punkte P, und man hat

$$OM' = kOM,\ OP' = kOP,\ P'M' = kPM.$$

Dies erhellt auch direkt aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke OPM, $OP'M'$; der Satz ist hiermit für den absoluten Wert der Koordinaten bewiesen, und es ist klar, daß die Koordinaten von M' das nämliche Vorzeichen haben wie die von M, da ja die zwei Punkte M, M' in dem nämlichen Koordinatenwinkel liegen.

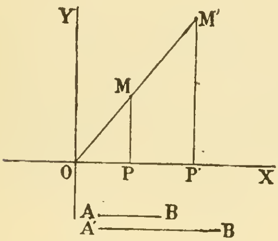


Fig. 81.

Nehmen wir jetzt an, in dem eben gewählten Koordinatensystem stelle die Länge AB die Längeneinheit dar; behalten wir die nämlichen Geraden als Achsen und die nämlichen positiven Richtungen wie vorher auf diesen Achsen bei, nur unsere Längeneinheit sei diesmal durch die Länge $A'B'$ dargestellt. Dann ergibt sich folgende Frage:

Es sei x und y ein System von zwei Zahlen; diesem Zahlensystem entspricht ein gewisser Punkt M, wenn wir AB zur Längeneinheit nehmen, und ein anderer Punkt M_1, wenn die Längeneinheit gleich $A'B'$ ist; wie läßt sich nun der Punkt M_1 von Punkt M ableiten?

k stelle die positive Zahl dar, welche die Länge $A'B'$ mißt, wenn AB Längeneinheit ist, in anderen Worten: k sei der Wert des Verhältnisses $\frac{A'B'}{AB}$; die Zahlen x und y sind die Koordinaten des Punktes M_1, wenn $\overline{A'B'}$ die Längeneinheit ist; hingegen sind diese Koordinaten gleich kx und ky mit der Länge AB als Einheit. Was die absoluten Werte betrifft, so geht dies aus Nr. 34 hervor. Ferner ist es klar, daß die Punkte M, M_1 sich in dem nämlichen Koordinatenwinkel befinden: und daß folglich die Koordinaten des ersteren die nämlichen Vorzeichen haben wie die des letzteren. Der Punkt M_1 ist also nichts anderes als die Abbildung durch Homothetie von M, d. h. M_1 fällt mit M' zusammen, wobei O das Zentrum und k das Verhältnis der Homothetie ist. Beschreibt der Punkt M irgendeine Figur, so beschreibt der entsprechende Punkt M_1 oder M' die homothetische Figur.

Im Grunde genommen sind die beiden Figuren dieselben, sie sind nur in verschiedenem Maßstab konstruiert.

Diese Resultate stimmen mit denen überein, die wir am Ende der Nr. 173 gefunden haben.

224. Wir suchen jetzt den Begriff der Koordinaten zu verallgemeinern, und zwar zuerst für die Ebene.

Wir können uns auf einem Blatt Papier eine Reihe Kurven gezogen denken, und zwar so, daß zwei benachbarte Kurven sich in ihrem ganzen Verlauf nie begegnen.

Bezeichnen wir diese Kurven mit Nummern, indem wir die eine z. B. mit der Nr. 0 versehen, dann die rechts der Reihe nach mit den Nummern 1, 2, 3, . . ., und die links mit den Nummern — 1, — 2, — 3, . . . Eine jede dieser Kurven ist also durch eine ganze relative Zahl gekennzeichnet. Diese Zahl wollen wir als die *erste* Koordinate aller derjenigen Punkte betrachten, welche auf der betreffenden Kurve liegen. Alsdann kann man auf jeder Kurve einen Punkt als Nullpunkt wählen, und mit dem in Nr. 218 entwickelten Verfahren kann man annähernd jeden Punkt dieser Kurve durch eine relative Zahl bestimmen; diese Zahl ist die *zweite* Koordinate des Punktes.

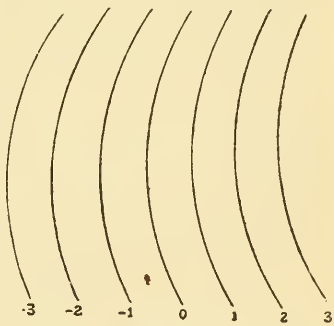


Fig. 82.

Alsdann kann man sagen, daß alle numerierten Punkte auf jeder Kurve durch ihre beiden Koordinaten bestimmt sind. Stellt sich der Leser diese Kurven als die Straßen einer Stadt vor und die numerierten Punkte einer Kurve als die verschiedenen Häuser dieser Straße, so ist jedes Haus ganz genau bestimmt, wenn man die Nummer der Straße und die des Hauses kennt.

Kehren wir jedoch zur Theorie zurück. Das Numerieren auf jeder Kurve läßt sich auf einfache Weise folgendermaßen bewerkstelligen. Man betrachtet ein zweites System von Kurven (Fig. 83), die, gleich denen des ersten, nahe aneinanderliegen. Jede Kurve dieses zweiten Systems durchschneidet ein einziges Mal alle Kurven des ersten und man numeriert die Kurven des zweiten Systems wie die des ersten. Man erhält auf diese Weise ein Netz von Kurven, das dem aus Nr. 222 ähnlich ist. Jeder Knoten in diesem Netze bezeichnet den Schnittpunkt von zwei numerierten Kurven, wovon die eine dem ersten, die andere dem zweiten System angehört. Diese beiden Nummern bilden die erste und die zweite Koordinate des Punktes. Die erste Koordinate bleibt die nämliche für alle Punkte einer Kurve des ersten Systems, die zweite Koordinate bleibt dieselbe für alle Punkte einer Kurve des zweiten Systems. Man sieht, daß dieses Verfahren darin besteht, auf jeder Kurve des ersten Systems denjenigen Punkt als Nullpunkt zu wählen, wo diese Kurve von der 0-Kurve des zweiten Systems geschnitten wird.

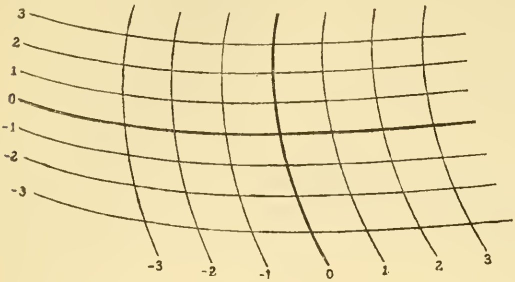


Fig. 83.

Sind die Kurven der beiden Systeme nicht weit voneinander entfernt, so daß die *Maschen* des Netzes ziemlich klein sind, so kann man sagen, daß jeder Punkt der Figur mit einer gewissen Annäherung durch die Koordinaten des in der Nähe liegenden Netzknotens bestimmt ist. Wünscht man eine größere Annäherung, so kann man zwischen zwei aufeinanderfolgende Kurven eines Systems neun andere Kurven einzeichnen, die man mittelst Dezimalzahlen numeriert, so wie wir es ja in Nr. 218 zur Genüge erklärt haben.

Bis jetzt nahmen wir an, unser Kurvennetz sei auf ein Blatt Papier gezeichnet. Man kann aber ebensogut annehmen, es befinde sich auf einer beliebigen krummen Fläche, und man ersieht hieraus, daß jeder Punkt einer solchen Fläche mittelst zwei Zahlen bestimmt werden kann, die man *krummlinige Koordinaten* nennt.

225. Diese Methoden, einen Punkt mittelst zweier Zahlen darzustellen, sind, wie man ersehen kann, zum Teil sehr willkürlich. Aber auf einen Punkt möchte ich den Leser aufmerksam machen, den ich stillschweigend angenommen habe. Kommen wir auf die obige Figur zurück. Man hat immer zwei benachbarte Kurven mit zwei aufeinanderfolgenden Nummern gekennzeichnet. Schiebt man nun zwischen diese beiden Kurven andere ein, so numeriert man diese mittelst der Dezimalzahlen, welche zwischen den Nummern unserer beiden ersten Kurven liegen usw. Bei diesem Verfahren hat man hauptsächlich den Zweck im Auge, *so zu handeln, daß die Koordinaten sehr nahe beieinander gelegener Punkte sehr benachbarte Zahlen sind.* Dieser Grundbedingung wird vollständig Genüge geleistet durch das rechtwinkelige Koordinatensystem, von dem wir ausgegangen sind. Hätte es sich bloß darum gehandelt, jede Kurve durch eine Zahl zu bezeichnen, so hätte man die Nummern aufs Geratewohl setzen können, indem man z. B. von 0 auf 1000000 überginge, dann auf 1 zurückkäme usw. Die dazwischenliegenden Zahlen hätte man alsdann nicht für die betreffenden dazwischenliegenden Kurven genommen. Auf diese Art und Weise wären wir aber zu einem Darstellungsmodus gekommen, der jeglicher *Stetigkeit* entbehrte.

226. Nach dem Vorausgeschickten kann man also auf einer Kugel jeden Punkt durch zwei Koordinaten bestimmen. Wir wollen im folgenden die gebräuchlichsten *sphärischen Koordinaten* etwas eingehender behandeln.

Eine Kugel entsteht, wenn ein Halbkreis $PMEQ$ sich um seinen Durchmesser PQ dreht. Während dieser Rotation erzeugt die Linie $PMEQ$ die Oberfläche der Kugel, indem sie mit der fortschreitenden Drehung des Halbkreises um PQ nach und nach alle möglichen Stellungen auf dieser Oberfläche einnimmt. (Diese Rotation erinnert an die einer Türe um ihre Angeln.) Eine jede dieser Stellungen heißt Meridian der Kugel. Auch durch jeden anderen Punkt als P und Q geht ein Meridian der Kugel, und zwar nur ein einziger; der die Kugel erzeugende Halbkreis nämlich in der Stellung, wo er durch den betreffenden Punkt hindurchgeht.

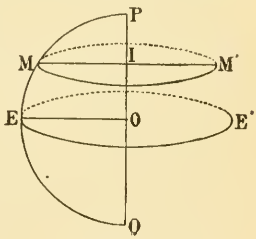


Fig. 81.

Während der Drehung beschreibt jeder Punkt M des rotierenden Halbkreises einen Kreis, dessen Mittelpunkt I der Fußpunkt der Senkrechten von M auf PQ ist. Der Radius IM erzeugt eine Fläche, die senkrecht auf PQ steht; diese Fläche ist die Fläche des vom Punkt M beschriebenen Kreises. Dieser Kreis heißt *Parallelkreis* der Kugel. Man kann durch jeden Punkt der Kugeloberfläche einen und nur einen ziehen. Von all diesen Parallelkreisen ist einer besonders erwähnenswert. Es ist der vom Punkte E beschriebene. E ist der Endpunkt desjenigen Radius vom Halbkreise $PMEQ$, der senkrecht auf dem Durchmesser PQ steht.

Dieser Parallelkreis heißt *Äquator*; sein Mittelpunkt liegt im Zentrum O der Kugel, sein Radius ist gleich dem der Kugel; er bildet einen *Hauptkreis* der Kugel, die Halbmesser der Parallelkreise nehmen beständig ab, je mehr sich der Punkt M auf dem Halbkreise nach der einen oder nach der andern Seite hin von E entfernt. Ist der Punkt M sehr nahe an P oder Q, so ist der Halbmesser des betreffenden Parallelkreises sehr klein; er wird Null, wenn M mit einem der Punkte P oder Q zusammenfällt.

Es ist klar, daß ein Punkt der Kugel vollständig bestimmt ist, wenn man den Meridian und den Parallelkreis angibt, auf dem er sich befindet. Meridiane und Parallelkreise umspannen die Kugel mit einem Netz, das viel Ähnlichkeit mit dem in Nr. 224 besprochenen zeigt. Die zwei Zahlen, mit deren Hilfe man den Meridian und den Parallelkreis eines Punktes bestimmt, und die wir im nächsten Abschnitt näher beschreiben wollen, heißen *Länge* und *Breite* des Punktes.

Nullmeridian nennen wir den Halbkreis, der die Kugel erzeugt, in einer beliebigen Stellung; in der Stellung PEQ z. B., in der seine Ebene mit der Zeichenebene zusammen fällt. In diesem Falle wird ein beliebiger Meridian durch den Punkt K bestimmt, in welchem er den Äquator EE' schneidet.

Um den Punkt K des Äquators mit Hilfe einer Zahl zu bestimmen, wendet man das in Nr. 217 erörterte Verfahren an. Den Punkt E wählt man als Nullpunkt und bestimmt auch eine positive Richtung auf den Äquator, z. B. die durch den Pfeil angedeutete.

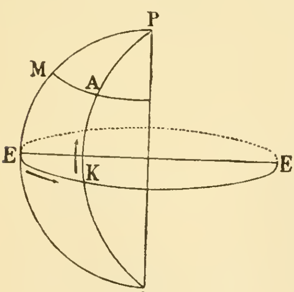


Fig. 85.

Jedem Punkte K des Äquators entspricht alsdann eine Zahl. Diese Zahl ist positiv, wenn der Punkt sich auf der vorderen Hälfte des Äquators befindet, negativ dagegen für die Punkte der hinteren Hälfte. Der absolute Wert dieser Zahl mißt die Bogenlänge EK. Für das Maß dieses Bogens kann man eines der in Nr. 217 erklärten Systeme annehmen, indem man die Bogen in Grade, Minuten und Sekunden, in Zentesimalgrade oder auch in Radiuslängen abschätzt. Die Zahl, die man auf diese Weise erhält, ist die Länge des Punktes K und aller anderen Punkte des Meridians PKQ. Der Punkt E', welcher dem Punkte E diametral entgegengesetzt ist, kann als Länge $+180$ und -180 haben, wenn man die Einteilung in Grade annimmt.

Um nun die Lage des Punktes A auf dem Meridian PKQ zu bestimmen, kann man auf diesem Halbkreise PKQ den Punkt K als Bogennullpunkt betrachten; man bestimmt alsdann auf diesem Halbkreise eine positive Richtung, z. B. die, welche durch den Pfeil angedeutet wird. Jeder Punkt A läßt sich alsdann auf dem Halbkreise durch eine Zahl bestimmen, die positiv oder negativ ist, je nachdem der Punkt A der oberen oder der unteren Halbkugel angehört. Der absolute Wert dieser Zahl gibt uns das Maß des Bogens KA in Graden, Minuten und Sekunden, in Zentesimalgraden oder in Radiuslängen. Dieser Bogen ist immer kleiner als ein Viertelkreis. Nimmt man die Einteilung in Grade, Minuten und Sekunden an, so ist der absolute Wert der Zahl, welche die Lage des Punktes A auf dem Halbkreise bestimmt, also die *Breite* des Punktes A, geringer als 90. In diesem System ist die Breite des Punktes P gleich $+90$ und diejenige des Punktes Q gleich -90. Die Länge dieser beiden Punkte ist unbestimmt, da ja alle Meridiane durch dieselben gehen.

Diese Eigentümlichkeit, die ich bei der Behandlung des allgemeinen Falles nicht hervorgehoben habe, kommt daher, daß eine der Hypothesen, die ich dort aufgestellt habe, hier nicht vollständig zutrifft; ich meine nämlich die Hypothese, daß zwei Kurven eines und desselben Systems sich nicht schneiden. Alle Meridiane schneiden sich in den Punkten P und Q.

Läßt man den Meridian $PAKQ$ sich um PQ drehen, so beschreibt der Punkt A einen Parallelkreis, dessen Punkte selbstverständlich alle die nämliche Breite haben.

Man kann sich die Beschaffenheit des Netzes der Meridiane und der Parallelkreise leicht vorstellen. Beschränken wir uns auf die Einteilung in Grade. Wir teilen den Äquator in Grade ein und ziehen durch jeden Einteilungspunkt einen Meridian. Den Punkt E bezeichnen wir mit 0; die andern Punkte der Reihe nach mit 1, 2, 3, . . ., -1, -2, -3, . . ., je nachdem sie rechts oder links von E oder 0 liegen. Alle Meridiane sind also numeriert, und zwar bewegt sich ihre Nummer einerseits von 0 bis 180, andrerseits von 0 bis -180. Der Meridian $PE'Q$ hat zwei Nummern, $+180$ und -180. Nun betrachtet man den Meridian PEQ; man teilt ihn in 180 Grade ein und bezeichnet den Punkt E wiederum mit 0. Nach obenhin, in der Richtung nach P, setzt man die Nummern 1, 2, 3, . . ., 90, in der Richtung nach Q jedoch die Nummern -1, -2, -3, . . ., -90. Man erhält so die Nummern der Parallelkreise, welche durch die Einteilungspunkte gehen. Jeder Meridian und jeder Parallelkreis ist auf diese Art und Weise numeriert, einerseits durch seine Länge, andrerseits durch seine Breite. Jedem Schnittpunkt eines

Meridians und eines Parallelkreises, jedem Knoten des Netzes also, entsprechen zwei Zahlen: seine Länge und seine Breite. Ein dichteres Netz erhält man, wenn man jeden Grad in 60 Minuten teilt und neue Meridiane und Parallelkreise einfügt. Schließlich kann man auch noch jede Minute in 60 Sekunden teilen usw.

Die Bezeichnungen Meridian, Parallelkreis, Länge, Breite sind der Geographie entlehnt. Ein Wort noch von dieser Wissenschaft. Nehmen wir an, die eben beschriebene Kugel sei die Erdkugel. Die Punkte P und Q bilden alsdann den Nord- und den Südpol der Erde; der Hauptkreis EKE' bildet den Erdäquator, und der Halbkreis PEQ den 0-Meridian.

Stellt man sich auf der Erde so, daß man die Füße in E hat, und vor sich den Nordpol, so hat man rechts Osten und links Westen. Bewegt sich also ein Punkt von E aus in östlicher Richtung, so bewegt er sich in der Richtung, die für den Äquator auf unserer Figur als positiv gilt.

Anstatt die Zeichen der Algebra $+$ und $-$ beizubehalten, spricht man gewöhnlich in der Geographie von östlicher und westlicher Länge, von nördlicher und südlicher Breite.

227. Noch ein Wort von den geographischen Karten. Will man einen Teil des Erdglobus auf einem Blatt Papier darstellen, so kann man sich diesen Erdteil als mit einem Netz von Meridianen und Parallelkreisen überzogen denken. Jeder Meridian, jeder Parallelkreis führt seine Nummer. Wie in Nr. 224 zeichnet man eine erste Kurvenschar; diese stellt die Meridiane dar und trägt dieselben Nummern. Alsdann zieht man eine zweite Kurvenschar, welche die Parallelkreise darstellen und die Nummern dieser letzten tragen. Jedem Knotenpunkt des Netzes, das die Kugel umspannt, entspricht ein Knotenpunkt auf dem Papier; jedem Punkte der Kugel entspricht ein Punkt des Blattes, der Karte. Diesen Punkt nennt man *Bild*. Man merkt gleich die große Willkür, mit der man bei einer solchen Darstellung zu Werke gehen kann, aber selbstverständlich muß die Stetigkeitsbedingung aus Nr. 225 eingehalten werden. Ein solches Bild, so willkürlich es auch scheinen mag, ist nie nutzlos, da man es immer wieder auf eine Kugel zurücktragen und von dieser alsdann die wirkliche Lage der Dinge ablesen kann. Übrigens verfährt man bei diesen Zeichnungen nicht so ganz planlos, sondern man beobachtet gewisse Regeln, die hier nicht eingehender behandelt werden können. Das Studium dieser Regeln, ihre mannigfachen Vorteile, bilden den Stoff zu einem sehr interessanten Kapitel der Geometrie.

V. Kapitel.

Empirische Kurven.

228. Denken wir uns einen Kaufmann*), der sich jeden Tag den Preis einer Ware notiert und ihn folgendermaßen durch einen Punkt darstellt. Er nimmt ein Blatt quadratisch geteiltes Papier und wählt z. B. eine der untersten Linien als Abszissenachse. Die Einteilungspunkte dieser Linie stellen die verschiedenen Daten dar und tragen, wenn man will, die Nummern 0, 1, 2, 3, . . . Das richtige Datum des ersten numerierten Punktes, des Abszissennullpunktes, muß übrigens angegeben sein. Unser Papier gibt uns von selbst die Senkrechten, welche man durch die verschiedenen Punkte auf die Achse ziehen kann. Auf dieser Senkrechten nun nimmt er eine bebestimmte Länge, die ihm, in einem bestimmten Maßstab, den Preis seiner Ware**) darstellt. Der Endpunkt dieser Länge stellt für jeden Tag den Preis der Ware dar, und das Bild, das man auf diese Weise erhält, läßt sich leichter studieren und überschauen als eine Zahlen-Tabelle. Ein solches Bild ist auch ganz inhaltvoll, denn ein bloßer Blick sagt uns, wann der Preis gestiegen oder gefallen ist, ob diese Schwankungen sich langsam oder schnell vollzogen haben. Macht unser Kaufmann solche Zeichnungen auf verschiedene Blätter und zwar für verschiedene Waren, oder zeichnet er alle auf ein einziges Blatt, so erlaubt ihm ein Vergleich zu sehen, ob die Schwankungen der Tagespreise seiner Waren vielleicht voneinander abhängig sind; sei es, daß der Preis zweier Waren zu derselben Zeit steigt oder sinkt, sei es, daß die Schwankungen des ersten denen des anderen vorausgehen. Manche Erklärung dafür findet er vielleicht in diesem oder jenem Ereignis, das sich zu dieser oder jener Zeit zugetragen hat, und das er sich ebenfalls notiert hat. Kenntnisse dieser Art können ihm von sehr großem Nutzen sein. Er kann die Änderungen der Tagespreise gewissermaßen *voraussehen* und daraus Nutzen ziehen.

---

*) Vgl. I. Perry, Höhere Analysis für Ingenieure (Leipzig, Teubner, 1902).

**) Um das Bild noch übersichtlicher zu machen, ist es vielleicht vorteilhaft, alle Preise um einen und denselben Wert herabzusetzen. Auf dem Bild bringt man so alle Punkte um dieselbe Länge der X-Achse näher.

Besonders die Schwankungen des Wertes von Börsenpapieren kann man auf diese Art und Weise verfolgen.

Der auswärtige Handel Frankreichs, die *Ein- und Ausfuhr* der Waren ändern von Jahr zu Jahr. Diese Änderungen kann man durch ein ähnliches Verfahren für eine Reihe von Jahren übersichtlich darstellen. Kennt man nämlich für jedes Jahr in Millionen Franken den Betrag der Ein- und der Ausfuhr, so braucht man nur in obiger Auseinandersetzung die Tage durch Jahre zu ersetzen; die Werte der ein- und ausgeführten Waren sind alsdann durch Punkte dargestellt. Anstatt die Resultate nur in globo aufzuzeichnen, kann man auch die Werte oder die Menge von gewissen Warenarten oder, wenn es sich um Artikel von großer Bedeutung handelt, wie Getreide z. B., sogar die einzelnen Waren anführen. Figuren dieser Art können auch nachweisen, wieviel die Steuern jährlich oder monatlich einbringen, wieviel eine spezielle Steuer jährlich abwirft, und die staatlichen Behörden können hieraus manche nützliche Idee schöpfen für die Staatswirtschaft.

229. In den Zeitungen findet man jede Woche eine Zivilstandsliste, die für eine Stadt oder eine Gemeinde die Zahl der Geburten, der Sterbefälle usw angibt. Auch diese Zahlen können durch Punkte auf ähnliche Art und Weise dargestellt werden.

Ein Blick auf eine solche Tabelle zeigt sofort, wie die Zahl der Geburten von einer Woche zur andern ändert; und es ist bemerkenswert, daß die Figuren, welche die Zahl der Geburten in den verschiedenen Jahren darstellen, einander sehr ähnlich sind. Die Figur, welche die Todesfälle darstellt, kann uns aufklären über das Wachsen oder Abnehmen, über die Dauer und die Ausdehnung einer Epidemie. Ähnliche Beispiele kann man in beliebiger Anzahl anführen.

230. Wie wir bis jetzt gesehen, läßt eine Reihe Zahlen sich immer durch eine Reihe Punkte darstellen. Sind die Punkte nahe aneinander gelegen und folgen sie sich in regelmäßigen Abständen, so erwecken sie in unserm Geiste den Begriff einer *Kurve,* die blos punktiert ist, und deren Punkte man durch einen einzigen zusammenhängenden, möglichst regelmäßigen Strich verbinden möchte. Zieht man diese Kurve aus, so macht man zuerst die Figur klarer und übersichtlicher; ferner ist es manchmal möglich, eine solche Kurve zu deuten und ihr einen Sinn beizulegen, sogar in solchen Fällen, wo es sich um unzusammenhängende Erscheinungen handelt wie die eben angeführten.

Anstatt eine Kurve zu zeichnen, die uns wöchentlich die Zahl der Geburten angibt, wollen wir zuerst eine Reihe Punkte bestimmen, welche die Zahlen der Geburten angibt, während der Zeitabschnitte zwischen dem Anfang der ersten Woche bis zum 7., 14., 21.,... Tage. Auf ein Blatt Millimeterpapier zeichnet man z. B. unten eine Abszissenachse. Auf einen der links liegenden Einteilungspunkte setzt man den Nullpunkt, und jedes Millimeter auf dieser Achse stellt den Zeitraum eines Tages dar. Die Einteilungspunkte numerieren wir mit 0, 1, 2, 3, . . . Auf der in Punkt 7 der x-Achse errichteten Senkrechten nehmen wir eine Länge, die in einem gewissen Maßstab die Zahl der Geburten der ersten Woche darstellt. Man nimmt z. B. an, ein Millimeter der Ordinate stelle 100 Geburten dar. Auf der Senkrechten, welche die x-Achse in Nr. 14 schneidet, nimmt man zuerst eine Länge = der Ordinate von vorher und fügt diejenige Länge hinzu, welche in demselben Verhältnis der Geburtszahl der zweiten Woche entspricht. Auf der Senkrechten zu Nr. 21 nimmt man zuerst eine Länge = der Ordinate von 14 und fügt die der Geburtszahl der dritten Woche entsprechende Länge hinzu usw. Macht man diese Arbeit ein ganzes Jahr hindurch, so erhält man 52 Punkte. Ein jeder dieser Punkte gibt die Zahl der Geburten an, welche stattgefunden haben vom Anfang des Jahres an bis zum Datum, welches seine Abszisse führt. Stellen wir uns vor, man ziehe eine möglichst regelmäßige Kurve vom Nullpunkte aus durch all die andern Punkte. Der Leser wird alsdann ohne Schwierigkeit annehmen, daß zu einer *beliebigen Zeit* des Jahres, und nicht nur in den Zeitabschnitten von 0, 7, 14, 21, . . ., 364 (da wir jedesmal sieben Tage nehmen) Tagen, die Ordinate der Kurve *annähernd* die Zahl der Geburten angibt, welche stattgefunden haben, vom Anfang des Jahres an bis zu dem Datum, das wir am Fuße der in Frage stehenden Ordinate auf der Abszissenachse ablesen können. Es genügt, die Millimeterzahl dieser Länge mit 100 zu multiplizieren. Die Figur liefert auch leicht die annähernde Zahl der Geburten, welche zwischen zwei bestimmten Daten stattgefunden haben.

Die Wörter *„regelmäßige Reihe von Punkten,“ „regelmäßige Kurve“* sind bis hierhin noch nicht definiert worden; im Geiste des Lesers erwecken sie eine verschwommene Idee, die selbst wieder zusammenhängt mit der verschwommenen Idee einer gewissen Regelmäßigkeit in der Erscheinung, welche der Punkt oder die Kurve darstellt. Obgleich nun diese verschwommenen Begriffe in gewissem Maße mathemathisch genauer bestimmt werden können, bitte ich doch den Leser, sich für den Augenblick damit zu begnügen. Ohne Zweifel kann man durch eine Reihe selbst *regelmäßig* aufgestellter Punkte, eine unendliche Menge Kurven ziehen, und zwar von beliebiger Form, aber in der Praxis zögert man kaum, den richtigen Strich zu treffen.

231. Die vorausgehenden Beispiele bezogen sich auf Erscheinungen, die einander nicht ununterbrochen, sondern in gewissen Abständen folgen. Die Zahl der Geburten z. B. kann nur mit *ganzen* Werten ändern. Die Darstellung mittelst Kurven läßt sich leichter auf Erscheinungen anwenden, die ununterbrochen ändern.

Das Gewicht eines Kindes z. B. ändert von einem Augenblick zum anderen; die Änderung von einem Tag zum anderen ist sehr beträchtlich. Vom Tage der Geburt an nimmt dieses Gewicht während einigen Tagen ab, da das Kind wenig Nahrung zu sich nimmt und sich der Stoffe entledigt, die es vor der Geburt in seinen Eingeweiden aufgespeichert hat. Nach dieser Zeit jedoch nimmt dieses Gewicht wieder zu, und zwar in ziemlich regelmäßiger Weise, wenn das Kind gesund ist. Nehmen wir an, man wiegt es jeden Tag*) und stellt jedesmal auf einer Figur sein Gewicht durch einen Punkt dar, immer nach der angeführten Methode. Die Abszissenachse wird in gleiche Teile geteilt, wovon ein jeder die Dauer eines Tages darstellt. Auf die dem jedesmaligen Datum entsprechende Senkrechte trägt man eine Länge auf, die in einem gegebenen Maßstabe das Gewicht des Kindes wiedergibt (oder das um eine bestimmte Menge verminderte Gewicht). Auf Millimeterpapier kann man z. B. auf der Abszissenachse die Dauer eines Tages durch die Länge eines Zentimeters darstellen. Ferner kann man annehmen, die Länge eines Millimeters der Ordinate stelle ein Gewicht von einem Gramm dar. Die Kurve, welche alle diese Punkte durchläuft, gibt uns ein Bild von den Änderungen, die das Gewicht eines Kindes erfährt; sie läßt uns auf die Art und Weise schließen, wie das Kind die Nahrung assimiliert, zu welchen Zeiten es sich wohl befindet oder krank ist. Nehmen wir an, wir hätten diese Kurve möglichst regelmäßig gezogen: Können wir alsdann einem Punkte dieser Kurve, den wir nicht experimentell bestimmt haben, irgendwelchen Wert beilegen?

Nehmen wir z. B. an, vom 12. auf den 13. Tag habe man der Gewichtskurve die Form AB gegeben und habe von einem Tag zum andern eine Gewichtszunahme von 20 Gramm festgestellt, so daß die Länge AA', parallel zur Abszissenachse, gemäß Übereinkunft 1 cm

*) Man kann dies beim Umkleiden tun. Wendet man die Methode des doppelten Wiegens an, so kann man das Kind mit den Windeln in einem Korb auf eine der Wagschalen legen und das Gleichgewicht herstellen. Alsdann kleidet man es aus, läßt die Windeln im Korbe zurück und stellt das Gleichgewicht wieder mit Hilfe von Gewichten her, die man in den Korb legt.

Länge haben muß, $A'B$ hingegen 2 cm. Um die Figur zu zeichnen, nahm man an, alle Gewichte seien um ein und dieselbe Menge verkleinert; dies geschieht, um die Kurve der Abszissenlinie mit den Punkten 12 und 13 näher zu bringen. Der Zwischenraum dieser Punkte ist auf unserm Papier in 10 Millimeter eingeteilt. Jedes Millimeter stellt einen Zeitraum von 2,4 Stunden oder 2 Stunden und 24 Minuten dar. Jeder dieser Punkte entspricht also einer bestimmten Stunde des in Frage stehenden Tages: Kann man nun die betreffende Ordinate ansehen, als gebe sie das Gewicht des Kindes zu genauer Stunde an? Man könnte dies frei tun, wenn das Gewicht des Kindes regelmäßig zunähme. Nun weiß man aber, daß dies nicht der Fall ist, daß bei Nahrungsaufnahme das Gewicht zunimmt, hingegen bei der Ausscheidung der Verdauungsprodukte abnimmt. Wiegt man also das Kind alle 2 Stunden 24 Minuten und stellt man das Gewicht auf Senkrechten zur Abszissenachse dar, die in Millimeterabständen voneinander entfernt stehen, so erhält man anstatt einer regelmäßigen Kurve vielmehr eine Kurve mit zahlreichen Zickzack. Diese Zickzack können bisweilen 2 bis 3 Zentimeter übersteigen. Es scheint also, daß zwischen A und B die Kurve ihren Sinn verliert.

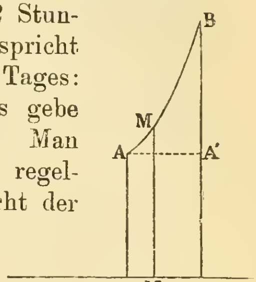


Fig. 86.

Gehen wir einen Schritt weiter. Haben wir das Gewicht des Kindes richtig bestimmt? Müssen oder dürfen wir in dieses Gewicht die Nahrung einbegreifen, die es eben zu sich genommen, oder die Überreste, die es ausgeschieden hat? Was wir suchen, ist das genaue Gewicht des lebendigen Stoffes, und dieses Gewicht ist unmöglich zu erreichen oder genau zu bestimmen. Dennoch gibt diese Kurve für einen ziemlich langen Zeitraum, einen Monat z. B. einen Begriff, von der Gewichtsänderung des lebendigen Stoffes. Die schnellen Zu- und Abnahmen des Gewichtes, von denen ich soeben gesprochen, müssen in Betracht gezogen werden, da sie die Beobachtung sehr erschweren und Irrtümer sich leicht einschleichen können. Übrigens muß man sagen, daß schon die täglichen Beobachtungen sich zu rasch folgen, denn die zufälligen Irrtümer können die Wahrheit sehr leicht verbergen oder entstellen. Von einem Tage zum anderen kann eine Gewichtszunahme stattfinden, wenn das Kind wirklich aus seiner Nahrung *Nutzen gezogen hat,* und nur die Beobachtungen, die sich auf mehrere Tage erstrecken, können Aufschlüsse von irgendwelchem Werte geben. In der Kurve, welche man durch alle Punkte einer Reihe von täglichen Beobachtungen (wir nehmen immer noch an, man habe diese gemacht) führt, bringen die zufälligen Irrtümer nur Schwankungen hervor, welche die Erscheinung nicht beeinflussen, die man darstellen will, und die übrigens schlecht definiert ist. Es erscheint alsdann natürlich, die unregelmäßige Kurve, welche durch diese Punkte führt, durch eine regelmäßigere zu ersetzen, welche einen Teil der Punkte unter sich läßt, den anderen über sich, allen Punkten aber sehr nahe bleibt. Ich gebe zu, daß dieses Verfahren ziemlich willkürlich ist, aber es scheint doch, daß man damit seinem Ziel näher kommt, und daß man von dieser mittleren Kurve annehmen kann, sie stelle für jeden Augenblick ein Gewicht dar, welches man das mittlere Gewicht des Kindes nennen könnte, und das als Maß die Ordinate der Kurve hätte, welche dem in Betracht kommenden Augenblick entspricht.

Bei Fieberfällen kann es von Nutzen sein, ziemlich häufig, zweimal des Tages z. B., die Temperatur des Kranken zu messen. Auch hier kann man die Beobachtungen durch Punkte darstellen, indem man immer ein ähnliches Verfahren befolgt*). Die Kurven, in diesem Falle, können den Ärzten von großem Nutzen sein für die Diagnose der Krankheit, oder um zu erkennen, auf welche Art und Weise diese ihren Verlauf nimmt.

232. Nichts hindert uns, in beliebig kurzen Zeitabständen die Temperatur, die ein Thermometer oder den Druck der Luft, den ein Barometer anzeigt, zu notieren und die eine oder die andere Reihe dieser Beobachtungen durch eine Kurve darzustellen. Das Verfahren ist immer das nämliche, dennoch ist es angebracht, dasselbe genauer zu bestimmen und etwas zu verallgemeinern.

Betrachten wir eine Erscheinung, wo eine meßbare Größe beständig mit der Zeit ändert. Z. B. die Höhe der Quecksilbersäule eines Thermometers. Die Änderungen dieser Größe können folgendermaßen dargestellt werden. Wir wollen die Zeiträume auf der Abszissenachse vermerken. An einem Punkte dieser Achse, der dem Zeitnullpunkt entspricht, setzt man 0, alsdann wählt man eine Längeneinheit, welche der Zeiteinheit entsprechen soll. Ein beliebiger Punkt der Abszissenachse stellt alsdann einen Augenblick der Zeitdauer dar. Die Abszisse dieses Punktes, mit der gewählten Längeneinheit gemessen, gibt die Zeit an, welche vom Zeitnullpunkt an bis zu diesem Augenblicke verflossen ist. Nehmen wir an, man trage auf die Senkrechte

*) Der Leser hat sicher schon Blätter gesehen, wie man sie für derartige Beobachtungen anwendet. Ich füge hinzu, daß man in der Regel die erhaltenen Punkte nicht durch eine Kurve miteinander verbindet, sondern durch eine gebrochene Linie.

zur Abszissenachse, welche durch diesen Punkt geht, in einem gegebenen Maßstabe eine Länge auf, welche in diesem Augenblick den Wert der veränderlichen Größe darstellt. Der Ort aller Endpunkte der Ordinate ist eine Kurve, welche die Änderungen dieser Größe darstellt.

Daß man diese Größe nicht in jedem Augenblick messen und alle Punkte der Kurve genau bestimmen kann, ist selbstverständlich; aber man kann immerhin so viele Punkte bestimmen, als man will, und die Kurve mit einer großen Annäherung zeichnen. Man kann sogar sagen, daß die *Registratoren* diese stetige Messung, die ich eben als unmöglich bezeichnet habe, in Wirklichkeit vornehmen.

233. Für die thermometrischen Beobachtungen z. B. kann man sich einen Apparat denken, der automatisch die „*Temperaturkurven*", sowie ich sie eben bestimmt habe, aufzeichnet. Das Koordinatensystem, das man in den meisten Registratoren angenommen hat, ist von dem gewöhnlichen ein wenig verschieden. Die meisten dieser Instrumente haben einen Umdrehungszylinder, den wir uns vertikal gestellt denken wollen. Ein Uhrwerk dreht ihn gleichmäßig um seine Achse. Diese Walze ist von einem Blatt Papier bedeckt, das selbst einen hohlen Zylinder bildet. Die Endspitze eines kleinen Stiftes, der mit Tinte getränkt ist, berührt das Blatt ganz leise. Steht der Stift unbeweglich, so zeichnet er auf dem Blatt einen horizontalen Kreis (K). Der Stift befindet sich an der Spitze einer Nadel, welche um einen festen Zapfen dreht. Hält man den Zylinder auf und setzt dagegen die Nadel in Bewegung, so zeichnet der Stift einen Kurvenbogen (C) auf das Blatt.

Funktioniert der Apparat, so wird die Stellung der Nadel und folglich auch die des Stiftes in jedem Augenblick durch den Wert der Größe selbst, die man beobachten will, bestimmt die Temperatur z. B. Wächst diese Größe, oder nimmt sie ab, so hebt sich der Stift oder er sinkt. Für den Augenblick jedoch will ich mich bloß mit der Einteilung des Blattes beschäftigen. Auf diesem befinden sich schon vorher ein System von Kreisen (K) und eine Kurvenschar (C). Jeder Kreis (K) trägt eine Nummer, welche die Temperatur angibt, der er entspricht; jede Kurve (C) dagegen eine Nummer, welche die Stunde anzeigt, wo der Stift sich auf dieser Kurve befindet. Man kann sich leicht vorstellen, die Kreise (K) und die Kurven (C) seien von dem Stifte selbst gezeichnet. Für die Kreise genügt es, den Stift an denjenigen Stellen zu befestigen, welche den verschiedenen Wärmegraden entsprechen, und den Zylinder drehen zu lassen. Um die Kurven (C) zu zeichnen, läßt man den Zylinder drehen, indem man den Stift ein wenig entfernt; dann alle zwei

Stunden z. B. setzt man ihn auf das Blatt und bewegt die Nadel sehr rasch. Bei dieser Drehung, die nach unserer Annahme ohne Zeitaufwand vor sich gehen soll, beschreibt der Stift ein Kurve (C), die man mit der betreffenden Stundenzahl numeriert. Die Kreise (K) und die Kurven (C) sind jedoch immer zum Voraus auf den Blättern punktiert vorgezeichnet, um sie zu unterscheiden von den Kurven, welche der Stift beschreibt. Schneidet man den Papierstreifen längs einer der erzeugenden Seitenlinien auf und entfaltet man denselben auf einer ebenen Fläche, so verwandeln sich die Kreise (K) in parallele Linien (K') und die Kurven (C) in Kurven (C'), die alle gleich sind und durch eine einfache Translation znr Deckung gebracht werden können. Die Geraden (K') und die Kurven (C') bilden ein *Netz*, das dem in Nr. 224 beschriebenen ähnlich ist.

Ist der Apparat in Bewegung, so zeichnet der Stift eine Kurve auf das Blatt; diese Kurve gibt uns für jeden Augenblick die Temperatur. Umgekehrt entspricht jedem Punkt der Kurve eine bestimmte Stunde, die man ungefähr ausrechnet mittelst der Nummer der bei-

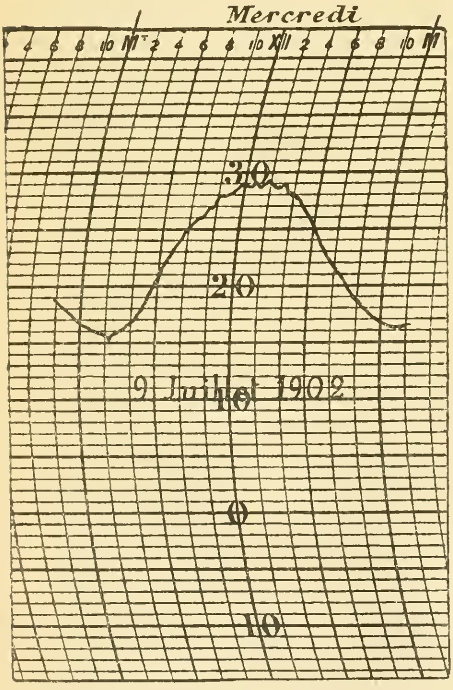


Fig. 87.

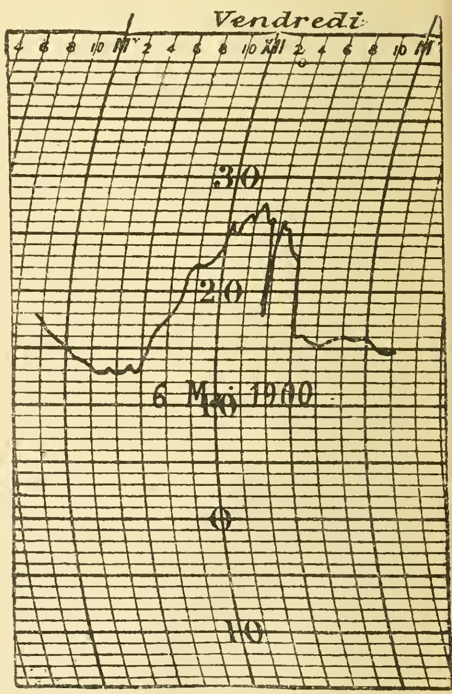


Fig. 88.

den Kurven (C), welche den Punkt einschließen. Diesem Punkte entspricht auch eine gewisse Temperatur, die man auf gleiche Weise mit Hilfe der Nummern der beiden einschließenden Kreise bestimmt. Übrigens erscheinen diese Erklärungen sehr klar auf den Figuren 87 und 88, welche Papierstreifen von solchen Registratoren darstellen. Diese beiden Figuren stellen die Temperaturschwankungen an zwei verschiedenen Daten dar. Man sieht darauf die Kurven (C') und die Geraden (K'); auf letzteren sind die Wärmegrade notiert. Die Kurve (C'), welche in der Mitte der Zeichnung liegt, trägt die Nummer XII, sie entspricht der Mittagsstunde. Deswegen ist sie stark gezeichnet, wie auch die Kurven, welche der Mitternacht entsprechen und M^T gezeichnet sind. Die anderen Kurven (C') entsprechen den Stunden, deren Nummer sie tragen. In Figur 87 bewegt die Temperatur sich ziemlich gleichmäßig; die andere Figur zeigt eine Unregelmäßigkeit, ein plötzliches Sinken und Steigen. Das Sinken entspricht einem Gewitterregen.

Ich habe kaum nötig, zu bemerken, daß der Papierstreifen ersetzt werden muß, sobald der Zylinder seine Drehung vollendet hat.

Instrumente dieser Art finden fortwährend ihre Verwendung in der Meteorologie, denn sie ermöglichen, die Schwankungen der Temperatur, des Luftdrucks und der Luftfeuchtigkeit zu notieren. In der Industrie gebraucht man sie auch, um die Veränderungen dieser oder jener Größe befolgen zu können, eine Kenntnis, die unter Umständen von sehr großem Nutzen sein kann.

234. Bis jetzt haben wir nur Erscheinungen kennen gelernt, die mit der Zeit ändern. Aber an dem Gesagten braucht fast nichts geändert zu werden, um zu verstehen, inwiefern diese nämliche graphische Methode ermöglicht, die Art und Weise der Abhängigkeit einer meßbaren Größe von einer anderen meßbaren Größe darzustellen.

Zum Beispiel, das Volumen einer Gasmenge, die in einem Manometer eingeschlossen ist, ändert mit dem Drucke. Auf die Abszissenachse kann man Längen auftragen, die im Verhältnis zum Volumen stehen; auf das Lot zu dieser Achse dagegen Längen, die dem Drucke proportional sind. Volumen und Temperatur lassen eine ähnliche Darstellung zu. Die Methode ist selbstverständlich allgemein. Sie leistet große Dienste bei dem Aufsuchen der Gesetze der Physik.

Die Kurven, bei denen wir jetzt verweilt haben, die Kurve des Gewichtes eines Kindes, Temperaturkurve eines Kranken, Kurven der Registratoren sind *empirische:* sie liefern nicht das *Gesetz,* nach dem eine Erscheinung sich vollzieht, sondern erzählen bloß die Geschichte dieser Erscheinung. Ein *Gesetz* besteht nur dort, wo es einen Lehrsatz gibt, der einfach genug ist, um von unserem Verstand erfaßt zu werden, und allgemein genug, um ein Voraussehen zu gestatten. Die Ereignisse jedoch, von denen oben die Rede war, sind das Resultat von allzu verwickelten und zu zahlreichen Ursachen, als daß man hoffen könnte, diese Ursachen auch erst nach langer Zeit entziffern und in richtige Gesetze formulieren zu können.

235. Nehmen wir an, man studiere in einer physikalischen Erscheinung die Änderungen zweier Größen, die man mit einer großen Genauigkeit messen kann, und die voneinander abhängig sind. Man macht eine große Menge Beobachtungen, die man alle auf eine Zeichnung durch Zahlen und Punkte darstellt, so wie wir dies oft erörtert haben. Keine der erhaltenen Zahlen ist ganz genau, und kein Punkt ist genau an seiner richtigen Stelle; aber, wenn unsere Beobachtungen wirklich wissenschaftlich sind, so kennt man für jede Zahl eine Grenze des *Beobachtungsfehlers*, und für jeden Punkt eine Grenze des Fehlers, den man bei der Aufzeichnung des Punktes begangen hat. Wie wir in Nr. 231 an einem ganz groben Beispiel nachgewiesen haben, kann man die Kurve, welche die Änderung darstellt, die wir studieren möchten, anstatt durch alle gezeichneten Punkte, zwischen diesen hindurchführen und so eine möglichst regelmäßige Kurve erhalten. Ein solches Verfahren ist durchaus gerechtfertigt, wenn man sich dabei nur so weit von den gezeichneten Punkten entfernt, als die Grenze der Beobachtungsfehler erlaubt. Erkennt der Physiker in der Kurve, die er auf diese Art und Weise erhält, eine ihm schon bekannte Kurve, eine Gerade, einen Kreis, oder eine Kurve, die er definieren kann und deren Eigenschaften er kennt, so kann er mit Recht sagen, daß er zu einem *Gesetze* gelangt ist. Dieses Gesetz erlaubt ihm, andere Ereignisse vorauszusehen, deren Beobachtung sein Gesetz bekräftigt (oder auch Lügen straft). Dieses Gesetz ist dann *genau*, wenn er bei der Annahme desselben nur solche Fehler begeht, welche die Grenze der Beobachtungsfehler nicht übersteigen*).

Der Fall, wo man Punkte in einer geraden Linie findet, ist ziemlich häufig, besonders wenn es sich um kleine Änderungen handelt, und es ist alsdann gut, diese Gerade so genau wie möglich zu bestimmen. Die Mathematik liefert für dieses und ähnliche Probleme

---

*) Wenn es auch *vollständig* genaue Gesetze gibt, so können wir sie doch nicht erreichen. Übrigens lassen die Erscheinungen, die wir messen, wahrscheinlich keine genaue Definition zu.

genaue Methoden, welche übrigens schwierige Rechnungen erfordern. Handelt es sich um eine Gerade, und sucht man kein ganz große Genauigkeit zu erreichen, so kann man einen Faden so spannen, daß er zwischen zwei bezeichneten Punkten hindurchgeht und im Durchschnitt sich möglichst wenig davon entfernt, und dann dem Faden mit einem Bleistift nachfahren*).

*) I. Perry, a. a. O. Um denselben Zweck bei einer Kurve zu erreichen, empfiehlt M. A. D. Romanoff den Gebrauch eines biegsamen Lineals; man kann sich jedoch auch des Zeicheninstrumentes bedienen, das unter dem Namen Kurvenlineal bekannt ist.

VI. Kapitel.

Elemente der analytischen Geometrie.

§ 1. — Gerade; gleichmäßige Bewegung.

236. Betrachten wir algebraische Ausdrücke folgender Art:

$$2x+1, \quad x^2+x+1, \quad \frac{1}{x}, \quad \sqrt{1-x^2}.$$

Diese Ausdrücke sind nichts anders als abgekürzte Schreibweisen gewisser Rechnungen, die man mit der Zahl x vornehmen soll. Die erste z. B. will sagen, daß man zum Doppelten der Zahl x die Einheit hinzufügen soll. Das Endresultat ist der Wert des Ausdruckes, welcher dem Werte von x entspricht. Wenn man den Wert von x angibt, so kann man den entsprechenden Wert des Ausdruckes berechnen. Dies drückt man anders aus, indem man sagt, daß $2x+1$, x^2+x+1, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{1-x^2}$ gegebene *Funktionen* von x sind. Jedoch ist es nötig, die Tragweite des oben Gesagten etwas einzuschränken. Man kann $\frac{1}{x}$ nur berechnen, wenn x nicht Null ist. Für $x=0$ ist $\frac{1}{x}$ keine bestimmte Funktion mehr. Man kann $\sqrt{1-x^2}$ nur für solche Werte von x berechnen, deren absoluter Wert kleiner als 1 ist. Für Werte von x, welche in absolutem Sinne größer als 1 sind, ist $1-x^2$ negativ; eine negative Zahl kann aber keine Quadratwurzel haben. $\sqrt{1-x^2}$ ist nur dann eine bestimmte Funktion von x, wenn x einen Wert hat, der zwischen -1 und $+1$ liegt, oder wenn x gleich einer dieser beiden Zahlen ist. Ein Funktion kann also nur bestimmt werden für Werte von x, die in einem gewissen Intervall liegen.

Ersetzt man in einem dieser Ausdrücke, in x^2+x+1 z. B., x durch verschiedene Zahlen, so nimmt die Funktion gewöhnlich verschiedene Werte an. Die Fragen, wie diese Funktion mit dem Werte x ändert, ob sie zu- oder abnimmt mit anwachsendem x usw. usw., drängen sich unwillkürlich auf. Diese Fragen gleichen den früher behandelten, und die graphische Darstellung kommt auch bei diesen wieder vor; in dem jetzigen Falle aber können diese Darstellungen rein mathematisch behandelt werden.

Wir können dies an einigen einfachen Beispielen sehen, die ich jetzt erörtern will.

237. a, b seien zwei gegebene Zahlen. Betrachten wir den Ausdruck $ax + b$; jedem Werte von x entspricht ein Wert von $ax + b$; $ax + b$ ist eine Funktion von x. Zeichnet man ein System von Koordinatenachsen*), so entspricht zuerst jedem Werte von x ein Punkt P der OX-Achse, dessen Abszisse x ist. Dann auf der Parallelen zur OY-Achse, welche durch den Punkt P geht, ein Punkt M, dessen Ordinate $\overline{PM}$ gleich $ax + b$ ist. Welches ist der *geometrische Ort* des Punktes M, wenn x ändert? Wir können dieselbe Frage noch anders stellen. Welches ist der *geometrische Ort* der Punkte M, deren Koordinaten die Gleichung

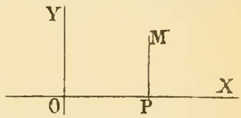


Fig. 89.

$$y = ax + b$$

erfüllen? Betrachten wir zuerst den Fall, wo b Null ist, wo also die Funktion y, die wir studieren wollen, ax ist.

Ist x Null, so ist y (oder ax) auch Null. Der Punkt O ist alsdann ein Punkt des geometrischen Ortes. Ist $x = 1$, so ist y (oder ax) gleich a; der Punkt A, der 1 zur Abszisse und a zur Ordinate hat, ist auch ein Punkt des Ortes. Zuerst nehme ich (wie in der Figur) an, a sei positiv. OI ist die Längeneinheit. Ich behaupte, die Gerade, welche durch die beiden Punkte O und A geht, sei der gesuchte Ort. Diese Gerade ist ganz in dem Winkel der positiven Koordinaten und in dem Scheitelwinkel dieses letzteren enthalten. Nimmt man einen beliebigen Punkt R dieser Geraden, welcher in dem ersten Winkel liegt, so sind beide Koordinaten dieses Punktes positiv, genau wie die Koordinaten 1 und a des Punktes A. Ist R' der Fußpunkt des von R auf die Abszissenachse gefällten Lotes, so zeigt die augenscheinliche Ähnlichkeit der Dreiecke $OR'R$, OIA, daß

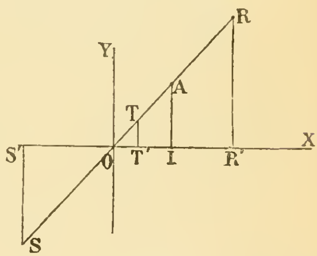


Fig. 90.

$$\frac{R'R}{OR'} = \frac{IA}{OI}.$$

*) Ich erinnere daran, daß der Gebrauch des Wortes „*Achse*" die Wahl einer Längeneinheit voraussetzt.

Nennt man die Koordinaten des Punktes R, x_0 und y_0, so sind diese Koordinaten positiv. Ebenso die Zahl a, und man hat also $R'R = y_0$, $OR' = x_0$, $IA = a$, $OI = 1$. Die vorhergehende Gleichheit zeigt, daß $\frac{y_0}{x_0} = a$ und daß folglich die Gleichung $y = ax$ für die Zahlen x_0, y_0 richtig ist.

Dasselbe ist für einen Punkt S der Fall, welcher in dem Winkel der negativen Koordinaten liegt. Bezeichnen wir seine Koordinaten mit x_1, y_1. Diese sind negativ. Die beiden ähnlichen Dreiecke $OS'S$, OIA zeigen, daß

$$\frac{S'S}{OS'} = \frac{IA}{OI};$$

da aber die Zahlen SS', OS' positiv sind, hat man $y_1 = -S'S$, $x_1 = -OS'$ und folglich infolge der vorhergehenden Verhältnisgleichung

$$\frac{-y_1}{-x_1} = \frac{y_1}{x_1} = a,$$

die Zahlen x_1, y_1 erfüllen noch immer die Gleichung $y = ax$.

Umgekehrt seien x', y' zwei Zahlen, für welche die Gleichung $y = ax$ richtig ist; ich behaupte, der Punkt, dessen Koordinaten x', y' sind, liegt auf der Geraden OA. T' sei der Punkt der X-Achse, der x' zur Abszisse hat. Auf der Geraden OA liegt ein Punkt T, dessen Abszisse x' ist, und dessen Ordinate nach dem Vorausgeschickten ax' oder y' ist.

Die Koordinaten x, y eines beliebigen Punktes der Geraden OA erfüllen mithin die Gleichung $y = ax$. Jeder Punkt, für dessen Koordinaten x, y diese Gleichung richtig ist, liegt auf der Geraden OA. Diesen doppelten Satz wollte man aufstellen, als man sagte, der Ort der Punkte, deren Koordinaten die Gleichung $y = ax$ erfüllen, sei die Gerade OA.

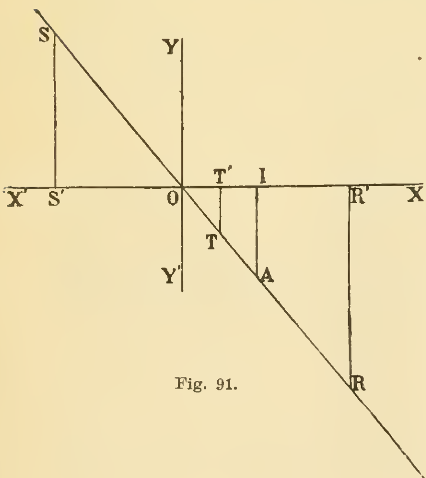


Fig. 91.

Der Beweis wurde in der Annahme geführt, a sei positiv. Alle Schlüsse bleiben bestehen, wenn a negativ ist. Der Punkt A mit der Abszisse 1 und der Ordinate a liegt alsdann im Winkel XOY', die Gerade OA liegt in diesem Winkel und in dessen Scheitelwinkel. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes derselben haben entgegengesetzte Vorzeichen. Die Dreiecke OIA, $OR'R$, $OS'S$ sind immer ähnlich. Das Verhältnis der absoluten Werte von Ordinate und Abszisse eines Punktes ist das nämliche für alle Punkte dieser Geraden. Dieses Verhältnis ist gleich dem absoluten Werte von a für den Punkt A. Das Verhältnis der Koordinaten y und x eines beliebigen Punktes der Geraden ist negativ und also gleich a, welches auch negativ ist. Die Gleichung $y = ax$ wird erfüllt für die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden OA. Um den umgekehrten Satz zu beweisen, braucht man nichts an der Beweisführung zu ändern: Jeder Punkt, dessen Koordinaten die Gleichung $y = ax$ erfüllen, liegt auf der Geraden OA.

Zugleich mit dem eben ausgesprochenen Satze hat man auch folgenden bewiesen:

238. Betrachtet man eine beliebige Gerade, die von der y-Achse verschieden ist und durch den Nullpunkt geht, so ist das Verhältnis $\frac{y}{x}$ der Koordinaten eines beliebigen dieser Punkte konstant; mit anderen Worten: Diese Koordinaten erfüllen eine Gleichung von der Form $y = ax$, in welcher a das konstante Verhältnis, oder wenn man will, die Ordinate des Punktes der Geraden mit der Abszisse 1 ist. Nur die Koordinaten der Punkte dieser Geraden erfüllen die Gleichung; die Zahl a heißt *Richtungskoeffizient* oder *Steigung* der Geraden.

Wir wollen nun untersuchen, wie diese Gerade mit dem Richtungskoeffizienten sich ändert.

I sei der Punkt der x-Achse, welcher 1 als Abszisse hat. Der Punkt A, dessen Koordinaten 1 und a sind, ist auf der Parallelen zur y-Achse, welche durch den Punkt I geht, gelegen, und zwar ober- oder unterhalb der x-Achse, je nachdem a positiv oder negativ ist.

Man nimmt als positive Richtung auf dieser Parallelen zur y-Achse diejenige Richtung an, welche vom Punkt I aus oberhalb der x-Achse liegt. Man erhält $\overline{IA} = a$.

Ist a Null, so fällt A mit dem Punkte I zusammen. Die Gerade OA ist alsdann nichts anderes als die x-Achse. Wächst a und wird es positiv, so steigt der Punkt A auf dem Lot, und die Gerade OA dreht um den Punkt O, immer in derselben Richtung, immer näher zur y-Achse hin. Sie sucht sich mit dieser zu decken, je mehr A steigt oder je größer a wird. Man kann a so groß wählen, daß der Winkel der Richtung OA und der Richtung OY beliebig klein wird. Dies drückt man aus, indem man sagt, die Richtung OA habe die Richtung OY zur Grenze, wenn a unendlich groß wird.

Ändert a von 0 bis zu $+\infty$, so sagt man noch, die Richtung OA, die ursprünglich mit der Richtung OX zusammenfällt, drehe um einen rechten Winkel bis zur Deckung mit der Richtung OY. Ist a negativ, aber von sehr großem, absolutem Wert, so liegt der Punkt A immer auf dem Lot zur Abszissenachse, das in I errichtet ist; aber der Punkt A liegt dieses Mal tief unten auf dieser Geraden. Die Richtung OA deckt sich fast mit der Richtung OY'. Nimmt a im Sinne der Algebra zu, d. h. nimmt sein absoluter Wert ab, so steigt der Punkt A immer höher und nähert sich dem Punkte I. Für $a = 0$ decken diese beiden Punkte sich. Die Gerade OA dreht alsdann immer in derselben Richtung, und zwar um einen Winkel, der um ein klein wenig kleiner ist als ein rechter Winkel.

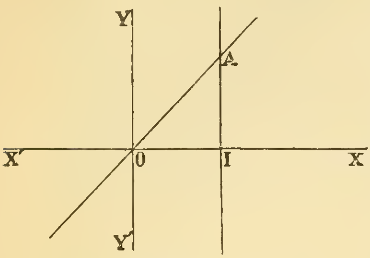


Fig. 92.

Wir können zusammenfassend folgendermaßen sagen: Nimmt a im algebraischen Sinne zu und ändert es von $-\infty$ bis $+\infty$, so dreht sich die Gerade, deren Richtungskoeffizient a ist und die ursprünglich mit der y-Achse*) zusammenfällt, um zwei rechte Winkel, immer in derselben Richtung, so daß sie schließlich wieder auf die y-Achse zu liegen kommt. Die Richtung, in welcher die Gerade sich dreht, ist die *direkte* Richtung; bezieht man eine Ebene auf ein Koordinatensystem, so nimmt man als *direkte* Richtung diejenige an, die durch den Nullpunkt geht und sich ursprünglich mit der positiven x-Achse deckt, durch eine Drehung von einem rechten Winkel aber mit der y-Achse zur Deckung gebracht werden kann. Es ist dies im Falle unserer Figur die umgekehrte Richtung, in der sich die Zeiger einer Uhr bewegen, die in der Zeichenebene mit dem Zifferblatt nach oben liegt.

Es ist klar, daß, wenn a wenig ändert, die Gerade um einen sehr kleinen Winkel dreht. Umgekehrt, wenn der Winkel, um den die Richtung der Geraden ändert, genügend klein ist, so folgt daraus eine Änderung von a, die beliebig klein sein kann. Nähert sich jedoch die Gerade der y-Achse, so werden die entsprechenden Änderungen von a für ein und dieselbe Änderung des Winkels immer größer.

Die Funktion $y = ax$, deren graphische Darstellung wir eben studiert haben, kann als die einfachste aller Funktionen von x be-

*) Es ist dies eine Ausdrucksweise, die durch das Vorhergehende zur Genüge gerechtfertigt ist.

trachtet werden. ax ist der Typus einer Größe, die mit x *proportional* ist (Nr. 50). Gibt man x eine Reihe beliebiger numerischer Werte, so sind die Werte, welche ax annimmt, proportional mit den Werten von x; a ist der Proportionalitätskoeffizient. In Nr. 50 betrachteten wir nur positive Zahlen (oder vielmehr absolute Werte) und der Proportionalitätskoeffizient war stets positiv; jetzt aber ist es selbstverständlich, daß wir auch die relativen Zahlen in Betracht ziehen. Es ist wichtig, zu bemerken, daß, wenn x (im algebraischen Sinne) zunimmt, ax mit positivem a wächst, mit negativem a dagegen abnimmt. Die vorausgehenden Erklärungen sowie die einschlägigen Figuren genügen hoffentlich, dies zu beweisen. Man kann noch hinzufügen, daß, wenn x' größer ist als x, d. h. wenn $x' - x$ positiv ist (Nr. 92), ax größer oder kleiner als ax' ist, je nachdem a positiv oder negativ ist, da ja der Unterschied $ax' - ax$ oder $a(x' - x)$ gewiß dasselbe Vorzeichen hat wie a.

Nimmt man an, a sei positiv, so wächst ax um so rascher mit x, je größer a ist.

Merken wir uns zum Schluß noch folgende Resultate, die von selbst klar sind:

Die Geraden, welche durch den Nullpunkt gehen und $+1$ oder -1 als Richtungskoeffizienten haben, sind die Halbierungsgeraden der Winkel XOY und XOY' mit ihren Scheitelwinkeln. Die Koordinaten der Punkte der ersten dieser beiden Geraden erfüllen die Gleichung $y = x$; die Koordinaten der Punkte der zweiten die Gleichung $y = -x$.

239. Man kann leicht erkennen, unter welcher Bedingung zwei Gerade, welche durch den Nullpunkt gehen und welche a und a' als Richtungskoeffizienten haben, senkrecht aufeinander stehen. OA, OA' seien diese beiden Geraden; A und A' sind Punkte derselben und liegen auf der Senkrechten zur x-Achse, welche durch den Punkt I geht, dessen Abszisse 1 ist. Da der Winkel AOA' ein rechter Winkel ist wie auch der Winkel XOY, so ist es klar, daß A' unterhalb der x-Achse liegen muß, wenn A oberhalb derselben liegt. Mit anderen Worten, die beiden Zahlen a und a' oder $\overline{IA}$ und $\overline{IA'}$ haben entgegengesetzte Vorzeichen. Aber in dem Dreieck AOA', das in O rechtwinklig ist, muß die Höhe OI, welche eine Länge $= 1$ hat, die mittlere Proportionale sein zwischen den beiden Abschnitten, welche sie auf der

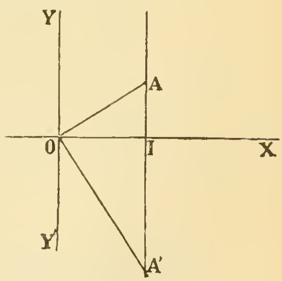


Fig. 93.

Hypotenuse AA' bestimmt. D. h. das Produkt der absoluten Werte der beiden positiven Zahlen IA und IA' muß gleich 1 sein; das Produkt der Zahlen $\overline{IA}$ und $\overline{IA'}$ oder a und a' muß also gleich -1 sein; die Bedingung $aa' = -1$ oder $aa' + 1 = 0$ ist also notwendig und hinreichend damit die zwei Geraden senkrecht aufeinander seien.

240. Kommen wir jetzt auf die Funktion $y = ax + b$ zurück, die wir zu Anfang der Nr. 237 gefunden haben. Ihre graphische Darstellung geht direkt aus dem Vorhergehenden hervor. OA sei die Gerade, welche durch den Nullpunkt geht und a als Richtungskoffizient hat. B sei ein Punkt der y-Achse mit der Ordinate b; dieser Punkt gehört dem gesuchten geometrischen Orte derjenigen Punkte an, deren Koordinaten x und y die Gleichung $y = ax + b$ erfüllen, da ja diese Gleichung für $x = 0$, $y = b$ erfüllt wird und 0 und b die Koordinaten des Punktes B sind.

Dies vorausgeschickt, gebe man x einen beliebigen Wert x_0; K sei der Punkt der x-Achse, dessen Abszisse x_0 ist. Bezeichnen wir mit M den Punkt der Geraden OA, der x_0 als Abszisse und ax_0 (Nr. 237) als Ordinate hat; wir bezeichnen mit M' den Punkt des gesuchten Ortes, welcher gleiche Abszisse hat, aber $ax_0 + b$ zur Ordinate: man erhält alsdann:

$$\overline{KM} = ax_0,\ \overline{KM'} = ax_0 + b = \overline{KM} + \overline{MM'},$$

und folglich

$$\overline{MM'} = b = \overline{OB}.$$

Man schließt daraus, daß der Vektor MM' mit dem Vektor OB äquipollent ist, und daß jeder Punkt M' des gesuchten Ortes sich vom Punkte M der Geraden OA, welcher gleiche Abszisse hat, ableiten läßt, und zwar, indem man diesem Punkt M eine Verschiebung erteilt, die gleich OB ist und parallel zu OB stattfindet. Man sieht gleich, daß der Ort des Punktes M' die durch den Punkt B gelegte Parallele zu OA ist.

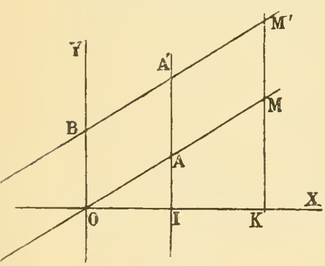


Fig. 94.

Betrachtet man umgekehrt irgend eine Gerade, welche nicht parallel zur y-Achse ist, und diese Achse in einem Punkte B mit der Ordinate b schneidet; ist ferner a der Richtungskoeffizient der Parallelen zu dieser Geraden, die durch den Nullpunkt geht, so ist es klar, daß diese Gerade als der Ort derjenigen Punkte betrachtet werden kann, für deren Koordinaten x und y die Gleichung $y = ax + b$ besteht.

Die Funktion $ax + b$ wird also durch eine Gerade graphisch dargestellt. Die Richtung dieser Geraden hängt nur vom Koeffizienten a ab, da ja diese Gerade parallel mit derjenigen Geraden ist, welche durch den Nullpunkt und den Punkt mit der Abszisse 1 und der Ordinate a geht. a heißt *Richtungskoeffizient* der Geraden; b heißt *Ordinate am Nullpunkt;* es ist dies die Ordinate des Punktes, wo sie die y-Achse schneidet. Der Wert von b beeinflußt die Richtung der Geraden nicht. Da alle Punkte der x-Achse eine Ordinate haben, die gleich Null ist, so findet man die Abszisse des Punktes, wo die Gerade die x-Achse schneidet, wenn man die Gleichung $ax + b = 0$ auflöst: die gesuchte Abszisse ist $-\frac{b}{a}$.

241. Die graphische Darstellung der Funktion $ax + b$ zeigt die Eigenschaften dieser Funktion. H sei der Punkt, $\left(\text{dessen Abszisse } -\frac{b}{a} \text{ ist}\right)$, wo die Gerade die x-Achse schneidet (Fig. 95).

Nehmen wir zuerst an, a sei positiv: man sieht auf der Figur, daß, wenn x kleiner ist als $-\frac{b}{a}$, d. h. durch einen Punkt der x-Achse dargestellt wird, der links von H liegt, die Ordinate $ax + b$ negativ ist. Wenn x wächst und sich $-\frac{b}{a}$ nähert, so nimmt die negative Ordinate an absolutem Werte ab, nimmt aber zu im algebraischen Sinne; sie ist Null für $x = -\frac{b}{a}$. Wächst x beständig, so wird sie positiv und wird immer größer mit x; wächst x von $-\infty$ bis zu $+\infty$, so wächst $ax + b$ auch von $-\infty$ bis zu $+\infty$. $ax + b$ wächst um so schneller, je größer a ist, je steiler die Gerade steht. Ist a dagegen negativ, so sieht man, daß $ax + b$ zuerst positiv ist, wenn x von $-\infty$ bis zu $+\infty$ ändert, dann nimmt es beständig ab, wird für $x = -\frac{b}{a}$ Null, dann negativ und fährt fort (im algebraischen Sinne) abzunehmen; $ax + b$ sinkt von $+\infty$ auf $-\infty$ (Fig. 96).

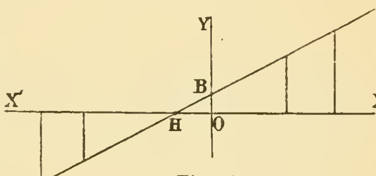


Fig. 95.

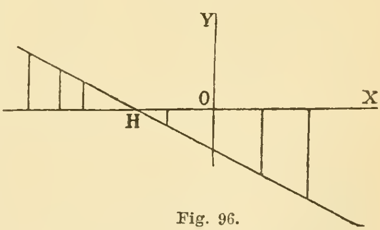


Fig. 96.

$ax + b$ ist nicht mit x proportional, aber die *Variationen von* $ax + b$

sind mit den Variationen von x proportional. Darunter ist folgendes zu verstehen. Gibt man x nacheinander zwei bestimmte Werte x_0 und x_1, so bezeichnet der Unterschied $x_1 - x_0$ die Änderung von x; y oder $ax + b$ nimmt alsdann die entsprechenden Werte

$$y_0 = ax_0 + b,\ y_1 = ax_1 + b$$

an. Die Änderung von y, welche derjenigen von x entspricht, ist

$$y_1 - y_0 = ax_1 + b - ax_0 - b = a(x_1 - x_0).$$

Man erhält sie, wenn man die Änderung von x mit einer konstanten Zahl a multipliziert; dies versteht man darunter, wenn man sagt, die Änderung von y sei mit derjenigen von x proportional.

242. Im Vorausgehenden können x_0, y_0 einerseits, x_1, y_1 andrerseits betrachtet werden als die Koordinaten von zwei beliebigen Punkten derjenigen Geraden, welche den Ort aller Punkte darstellt, deren Koordinaten die Gleichung $y = ax + b$ erfüllen. Die Beziehung

$$y_1 - y_0 = a(x_1 - x_0)$$

oder

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

kann unter folgender Form ausgesprochen werden: Man erhält den Richtungskoeffizienten einer Geraden, indem man die Differenz der Ordinaten zweier beliebiger Punkte durch die Abszissendifferenz derselben Punkte dividiert.

243. Der Ausdruck $ax + b$ hat die nämlichen Eigenschaften wie der Ausdruck $vt + a$, den wir in Nr. 216 studiert haben. Der Name der Konstanten a, b oder v, a und der Veränderlichen x oder t ändert nichts daran. Nur der Umstand, daß die Veränderliche im ersten Grade auftritt, ist von Bedeutung. Übrigens wird uns der folgende Abschnitt sehr augenscheinlich von der Gleichheit der beiden Formeln überzeugen.

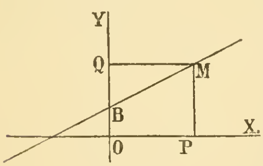


Fig. 97.

Nehmen wir an die Veränderliche x der Formel $ax + b$, stelle die Zeit dar, so wie wir dies in Nr. 77 erörtert haben. Man kann alsdann die x-Achse, wenn man will, als eine Art Uhr betrachten, wie wir uns eine solche z. B. in Nr. 78 vorgestellt haben. Aber das Zifferblatt ist hier nicht rund, sondern gerade, und die Endspitze des Zeigers durchläuft dasselbe gleichmäßig von links nach rechts, indem es durch den Nullpunkt O, im Zeitnullpunkt hindurchgeht. In der

Zeiteinheit durchläuft die Endspitze die Längeneinheit. Stellen wir uns jetzt einen beweglichen Punkt vor, der sich auf der y-Achse bewegt, und zwar so, daß die Ordinate y in jedem Augenblick x durch die Formel $y = ax + b$ gegeben ist. Dieser Punkt bewegt sich gleichmäßig auf der y-Achse mit einer Geschwindigkeit a, und zur Zeit 0 geht er durch B, dessen Ordinate b ist (Nr. 214). Zieht man die Gerade, die den geometrischen Ort aller Punkte darstellt, deren Koordinaten x, y die Gleichung $y = ax + b$ erfüllen, so kann man leicht, für jeden Augenblick x, die betreffende Stellung des beweglichen Punktes auf der y-Achse ausrechnen. Ist z. B. der Zeiger im Augenblick x in P, einem Punkt, dessen Abszisse ebenfalls durch die Zahl x gemessen wird, so sucht man den Punkt M der Geraden, welcher x zur Abszisse hat. Der Punkt Q, wo die Parallele zur x-Achse die y-Achse schneidet, gibt uns die Stellung des beweglichen Punktes. Mit der Zeit bewegt dieser Punkt sich höher oder niedriger, je nachdem a positiv oder negativ ist. Ist a z. B. positiv, so bewegt sich der Punkt schneller oder langsamer, seine Ordinate wächst schneller oder langsamer, je nachdem a groß oder klein ist.

Die Formel

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

gibt uns den Richtungskoeffizienten der Geraden, welche durch die Punkte x_0, y_0 und x_1, y_1 geht. Man kann diesen Koeffizienten aber auch ansehen als die Geschwindigkeit, mit der sich ein beweglicher Punkt *gleichförmig* auf der y-Achse bewegt und welcher zu den Zeiten x_0, x_1 sich in y_0 und y_1 befindet. Dies alles haben wir schon in Nr. 214 erörtert, nur mit dem Unterschied, daß wir damals t nannten, was wir jetzt unter x verstehen, und Abszisse, was jetzt Ordinate heißt.

244. Diese Darstellungsweise findet Verwendung bei *graphischen Eisenbahnfahrplänen;* sie liefern ein klares und übersichtliches Bild von dem Gang der Eisenbahnzüge auf ihren Strecken.

Betrachten wir zwei rechtwinklige Koordinaten-Achsen OX, OY. Man verwendet jedoch nur die positiven Achsenhälften und kann also die Ränder des Zeichenblattes als Achsen ansehen. Den Nullpunkt können wir z. B. in die linke untere Ecke verlegen. Die x-Achse, der untere Rand des Zeichenpapieres, ist in 24×6 gleiche Teile eingeteilt, wovon ein jeder einen Zeitraum von 10 Minuten darstellt. Der Nullpunkt O entspricht der Mitternacht. Je sechs Einteilungen bedeuten eine Stunde, und man kann gleich die Stunde, ja sogar mit ziemlicher Genauigkeit die Minute bestimmen, welcher ein Punkt x der x-Achse entspricht. Durch die Einteilungspunkte legt man Parallelen zur y-Achse. Die Parallelen, welche den Stunden entsprechen, werden stärker ausgezogen. Auf der y-Achse, der linken Randseite des Zeichenblattes also, sind die Namen der Stationen durch die Anfangsbuchstaben vermerkt; der Nullpunkt O auf der y-Achse entspricht einer der beiden Endstationen; P ist die andere Endstation und liegt ganz oben auf der Zeichnung. OP gibt uns in einem gewissen Maßstab die Kilometerentfernung der beiden Endstationen. Es versteht sich von selbst, daß die dazwischen liegenden Stationen A, B, C, D, E so aufgetragen sind, daß der Maßstab unverändert bleibt.

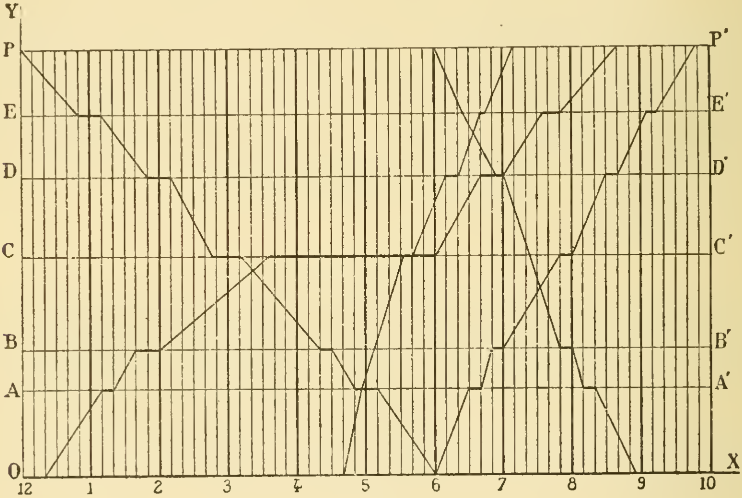


Fig. 98.

Durch die Punkte A, B, C, ..., P legt man Parallelen AA', BB', CC', ..., PP' zur x-Achse. Der Gang eines beliebigen Zuges wird alsdann durch eine Gerade so dargestellt, daß die Ordinate eines bestimmten Punktes derselben, in dem gegebenen Maßstabe, die Entfernung vom Punkte O angibt, und zwar zu der Stunde, welche von der entsprechenden Abszisse angezeigt wird. Man vereinfacht jedoch die Anfertigung einer solchen Zeichnung, indem man die Bewegung des Zuges zwischen zwei Stationen als gleichförmig betrachtet. Mit andern Worten, an Stelle des richtigen Zuges denkt man sich (Nr. 215) zwischen diesen beiden Stationen einen *mittleren* Zug, der gleiche Abgangs- und Einfahrtszeit mit dem richtigen Zuge hat. Seine Geschwindigkeit ist die mittlere Geschwindigkeit des wirklichen Zuges.

Zwischen zwei Stationen C und D stellt man also den Gang des Zuges durch eine gerade Linie dar. Diese Linie verbindet den Punkt der Linie CC', dessen Abszisse die Abgangszeit in C angibt, mit dem Punkte der Linie DD', dessen Abszisse die Ankunftszeit in D andeutet. Hält der Zug eine Zeitlang in D, so wird dieser Halt durch einen kräftigen Strich parallel zur Abszissenachse vermerkt; die Länge des Striches entspricht der Länge des Aufenthaltes.

Die Fahrt eines Zuges von O nach P wird also durch eine gebrochene Linie dargestellt, welche von der x-Achse nach rechts zur Parallelen PP' hinaufsteigt. Die Fahrt eines Zuges von der Station P nach der Station O wird ihrerseits wieder durch eine gebrochene Linie dargestellt, welche von der Parallelen PP' zur x-Achse nach rechts zur Abszissenachse hinabgeht. Auf jedem Strich sieht man zu einer beliebigen Zeit, wo ungefähr, und im besondern zwischen welchen Stationen der Zug sich befindet. Begegnen sich zwei Linien, die beide die Fahrt eines Zuges versinnbilden, so bedeutet dies, daß die beiden Züge sich zu derselben Stunde an demselben Punkte begegnen. Die Stunde der Kreuzung kann man auf der Abszissenachse lesen. Die Entfernung von der Abgangsstation liest man auf der Ordinatenachse. Liegt nur ein Gleis auf der Strecke, so muß die Kreuzung selbst im Bahnhofe stattfinden, und zwar wenn der eine der beiden Züge schon eingelaufen ist; dasselbe trifft zu für zwei Züge, welche die nämliche Strecke auf dem nämlichen Gleise in der nämlichen Richtung durchlaufen, aber verschiedene Geschwindigkeiten haben.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Zuges zwischen zwei Stationen ist gegeben durch den Richtungskoeffizienten der Geraden, welche die Fahrt des Zuges darstellt. Dieser Koeffizient ist positiv für die hinaufsteigenden, negativ für die hinunterlaufenden Züge. Legt man durch den Punkt O eine Parallele zur Geraden, welche den Gang des Zuges darstellt, und zwar bis zum Schnittpunkt mit der Parallelen zur y-Achse, welche man durch den der Zeit 1 Uhr entsprechenden Punkt der x-Achse gezogen hat, so gibt uns die Ordinate des Schnittpunktes, in dem angenommenen Maßstab, die Zahl der Kilometer, welche der Zug in einer Stunde zurücklegt.

Auf der oben angeführten Figur, welche nur dem Zeitraum von Mitternacht bis 10 Uhr morgens entspricht, hat man drei aufwärts und zwei nach unten fahrende Züge eingezeichnet. Der aufwärts fahrende geht ziemlich langsam; er stellt z. B. einen Güterzug vor. $12^{\underline{20}}$ fährt er aus dem Bahnhof O und kommt $1^{\underline{10}}$ in A an. $1^{\underline{20}}$ fährt er wieder ab und trifft $1^{\underline{40}}$ in B ein. Dort liegt er bis 2 Uhr und kommt $2^{\underline{35}}$ in C an. In C wartet er auf einen aus der nämlichen Richtung kommenden Zug, welcher schneller fährt Dieser fährt um $4^{\underline{40}}$ ab, hält nie zwischen O und C, kommt $5^{\underline{30}}$ in C an und fährt schon $5^{\underline{40}}$ wieder ab; der Güterzug fährt aber erst um 6 Uhr von C fort; 8^{40} kommt er in P an, während der zweite schon 7^{10} angekommen ist. Unterwegs kreuzt dieser Güterzug zwischen C und B mit einem andern Güterzug, der aus entgegengesetzter Richtung kommt; diese Kreuzung findet gegen $3^{\underline{20}}$ statt. Es ist jedoch unnütz, diese Erörterungen weiter auszudehnen.

Diese Art und Weise, die Fahrt der Züge darzustellen, ist sehr nützlich, nicht nur um den Gesamtverkehr einer Strecke oder eines Teiles einer Strecke übersichtlicher darzustellen, sondern auch um die *Fahrpläne* aufzustellen. Im besondern erkennt der Leser auch sogleich, wie man einen Extrazug einlegen kann, wie man seine Abfahrtzeit, seine Durchfahrt auf den verschiedenen Stationen bestimmen kann, damit der Verkehr der regelmäßigen Züge auf derselben Strecke nicht leidet. Zwischen den Geraden, welche die Fahrt der regelmäßigen Züge darstellen, sind weiße Stellen auf dem Papier. An diesen Stellen muß man einen Platz für den Extrazug finden, und der Gesamtüberblick zeigt uns, welche Geschwindigkeit wir ihm geben müssen, wann und wo er möglichen Falls länger halten muß.

245. Der geometrische Ort derjenigen Punkte, deren Koordinaten x, y eine Gleichung ersten Grades, also eine Gleichung der Form

$$Ax + By + C = 0,$$

wo A, B, C gegebene Zahlen sind, erfüllen, ist eine Gerade.

Betrachten wir zuerst den Spezialfall, wo B Null ist. Die Gleichung schrumpft auf $Ax + C = 0$ zusammen. Hieraus folgt $x = -\frac{C}{A}$; die vorhergehende Gleichung ist für die Koordinaten aller Punkte erfüllt, deren Abszisse $-\frac{C}{A}$ ist, und nur für diese Punkte, welches auch der Wert der Ordinate sei.

Alle diese Punkte liegen auf einer Parallelen zur y-Achse, welche durch den der Abszisse $-\frac{C}{A}$ entsprechenden Punkt der x-Achse geht. Diese Gerade stellt für diesen Fall den gesuchten Ort dar.

Ist B nicht Null, so kann man die vorhergehende Gleichung in bezug auf y auflösen. Wir erhalten die verschiedenen Gleichungen (Nr. 132)

$$By = -Ax - C$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{A}.$$

Ersetzt man

$$a = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{A},$$

so nimmt die letzte Gleichung die Form $y = ax + b$ an. Der geometrische Ort der Punkte, deren Koordinaten diese Gleichung (oder die vorhergehende) erfüllen, ist eine Gerade, die $-\frac{A}{B}$ als Richtungskoeffizient hat, und deren Ordinate am Nullpunkt $-\frac{C}{B}$ ist. Ist A Null, so ist der Ort eine Parallele zur x-Achse, die Ordinate am Nullpunkt ist aber immer $-\frac{C}{B}$.

Umgekehrt kann jede Gerade betrachtet werden als der Ort aller Punkte, deren Koordinaten x, y eine Gleichung ersten Grades zwischen x und y, also eine Gleichung der Form $Ax + By + C = 0$ erfüllen.

Nehmen wir an, die Gerade sei parallel zur y-Achse, und x_0 sei die Abszisse des Punktes, wo sie die x-Achse schneidet. Man kann diese Gerade alsdann als den Ort aller Punkte ansehen, deren Koordinaten die Gleichung $x = x_0$ oder $x - x_0 = 0$ erfüllen. Diese Gleichung gehört zu der Klasse der eben gesehenen, für $A = 1$, $B = 0$, $C = -x_0$.

Nehmen wir jetzt an, die Gerade sei nicht parallel zur y-Achse a sei der Richtungskoeffizient der Parallelen, welche man durch den Nullpunkt zu dieser Geraden zieht; b ist die Ordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse. Die Gerade kann alsdann betrachtet werden als der Ort aller Punkte, deren Koordinaten die Gleichung $y = ax + b$, oder $ax - y + b = 0$ erfüllen. Diese Gleichung gehört auch zu der Klasse, die wir oben kennen gelernt, für $A = a$, $B = -1$, $C = b$.

Man sagt, die Gleichung $Ax + By + C = 0$ stelle eine Gerade dar, und jede Gerade hat eine Gleichung dieser Form.

246. Gibt man die Zahlenwerte A, B, C der Gleichung

$$Ax + By + C = 0$$

einer Geraden an, so ist es leicht, diese Gerade zu konstruieren. Man kann dies mit Hilfe des Richtungskoeffizienten und der Ordinate am Nullpunkt tun. Jedoch ist es öfters bequemer, die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen zu suchen. Die Gerade schneidet die x-Achse in einem Punkt, dessen Ordinate y Null ist, und dessen Abszisse die Gleichung $Ax + C = 0$ erfüllen muß, in demjenigen Punkte also, dessen Abszisse $-\frac{C}{A}$ ist; man berechnet diese Abszisse und stellt sie durch einen Punkt der x-Achse nach dem angenommenen Übereinkommen dar. Man hat übrigens schon gesehen, daß die Ordinate am Nullpunkt der Geraden $-\frac{C}{B}$ ist. Man braucht also nur mehr die beiden gefundenen Punkte zu verbinden. Diese Konstruktion gelingt nicht, wenn eine der beiden Zahlen A oder B Null ist. Die Gerade ist alsdann parallel zur x-Achse oder zur y-Achse. Es genügt alsdann, den Schnittpunkt dieser Geraden mit derjenigen Achse zu suchen, welche sie schneidet.

Die Konstruktion gelingt auch nicht für $C = 0$. In diesem Falle geht die Gerade durch den Nullpunkt, da ihre Gleichung für $x = 0$, $y = 0$ erfüllt ist. Man sucht alsdann z. B. den Punkt der Geraden, dessen Abszisse 1 ist; die Ordinate dieses Punktes wird durch die Gleichung $A + By = 0$ gegeben. Hieraus zieht man $y = -\frac{A}{B}$: diesen Punkt verbindet man mit dem Nullpunkt. $-\frac{A}{B}$ ist der Richtungskoeffizient der Geraden.

Alle diese Konstruktionen zeichnen sich leicht auf Millimeterpapier, die Achsen werden längs der Quadratlinien gezogen, und man wählt eine Längeneinheit, die in einfachem Verhältnis steht mit der Einteilung des Blattes. In Nr. 222 haben wir dies erörtert. Der Leser kann alsdann aufs Geratewohl beliebige positive oder negative Zahlen für die Koeffizienten A, B, C wählen; er wird sich alsdann von der Leichtigkeit überzeugen können, mit der er eine Gerade konstruieren kann, deren Gleichung er kennt.

§ 2. Graphische Darstellung einiger einfacher Funktionen.

247. Ist eine *Funktion* von x, deren Wert man für jeden beliebigen Wert von x berechnen kann, gegeben, so kann man diese Funktion auf dieselbe Art und Weise darstellen, wie dies für die Funktion $ax + b$ der Fall war. Jedem Werte von x entspricht ein Punkt M der Zeichenebene, dessen Abszisse x und dessen Ordinate der entsprechende Wert der Funktion ist. Der geometrische Ort, den der Punkt M beschreibt, wenn x ändert, stellt die Funktion dar. Man kann auch sagen, dieser geometrische Ort sei der Ort aller Punkte M, deren Koordinaten x, y die Gleichung erfüllen, welche man erhält, indem man y der gegebenen Funktion von x gleichsetzt, oder deren Koordinaten eine beliebige Funktion von x und y erfüllen, welche der vorhergehenden äquivalent ist.

Zeichnet man in eine Ebene eine Kurve in bezug auf ein Koordinatensystem, so gestattet die Figur jeden Augenblick, den Wert der Ordinaten derjenigen Punkte der Kurve zu messen, deren Abszisse einen gegebenen Wert hat. Kann man eine Gleichung zwischen x und y konstruieren, die für jeden Wert von x genau denselben Wert für y ergibt wie diese Messung, so ist diese Gleichung nichts anders als die Gleichung unserer Kurve. Diese Kurve kann als der geometrische Ort derjenigen Punkte betrachtet werden, deren Koordinaten die Gleichung erfüllen. Umgekehrt kann eine Gleichung zwischen x und y, die man angibt, als die Gleichung einer Kurve betrachtet werden. Diese Kurve ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Koordinaten die Gleichung erfüllen. Die Kurve stellt die Gleichung geometrisch, die Gleichung dagegen die Kurve algebraisch dar.

248. Betrachten wir die Funktion x^2 oder die Gleichung $y = x^2$, und sehen wir nach, welche Form die Kurve besitzt, die diese Funktion oder diese Gleichung graphisch darstellt.

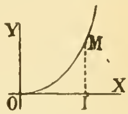


Fig. 99.

Wir lassen zuerst den Wert der Veränderlichen x allmählich anwachsen, von Null an. Wird x größer, so nimmt x^2 auch zu. x^2 wird immer größer, je größer x wird.

Für $x = 0$ ist x^2 auch Null. Der Nullpunkt des Koordinatensystems ist also ein Punkt des gesuchten geometrischen Ortes. Ist x ganz klein, so ist auch x^2 sehr klein, und zwar noch viel kleiner als x. Nimmt z. B. x die Werte

$$0{,}001;\ 0{,}002;\ 0{,}003;\ \ldots;\ 0{,}01$$

an, so wird x^2

$$0{,}000001;\ 0{,}000004;\ 0{,}000009;\ \ldots;\ 0{,}0001.$$

Ist also x sehr klein, so liegt der Punkt, dessen Koordinaten x und x^2 sind, viel näher an der x-Achse als an der y-Achse. Am Nullpunkt also entfernt die Kurve sich kaum von der x-Achse. Für $x = 1$ ist y oder x^2 auch gleich 1; man erhält also einen Punkt M der Kurve, welcher auf der Halbierenden des Achsenwinkels XOY liegt. Ist x größer als 1, so ist auch x^2 größer, und wenn x bei weitem die Einheit übersteigt, so ist $y = x^2$ bei weitem größer als x; in diesem Falle liegt die Kurve näher an der y-Achse als an der x-Achse.

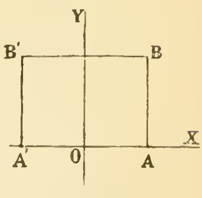


Fig. 100.

Betrachten wir nunmehr negative Werte von x. Für zwei symmetrische Werte a und $-a$ von x hat x^2 denselben Wert a^2; die beiden Punkte des geometrischen Ortes, welche diesen symmetrischen Abszissen a und $-a$ entsprechen, haben gleiche Ordinate. Ein Blick auf Fig. 100 erklärt die Sache. Man nimmt an, A und A' seien zwei

Punkte der x-Achse mit den Abszissen a und $-a$. Der Nullpunkt liegt also in der Mitte von AA'. B und B' sind die Punkte, welche gleiche Ordinate haben, und deren Abszissen a und $-a$ sind. B und B' liegen symmetrisch zur y-Achse.

Derjenige Teil der Kurve, welcher den negativen Werten von x entspricht, ist symmetrisch mit der Kurvenhälfte der positiven Werte von x. Die Kurve erhält eine Form, die der Fig. 101 ähnlich ist. Ich kann dem Leser nur raten, diese Kurve sorgfältig auf Millimeterpapier zu zeichnen. Er soll dazu eine ziemlich große Längeneinheit wählen, das Dezimeter z. B. Er wird alsdann mit Leichtigkeit eine große Anzahl Punkte bestimmen können. Ist diese Kurve ein für allemal mit Sorgfalt aufgetragen, so gestattet eine einfache Messung der Ordinate, das Quadrat einer beliebigen Zahl zu finden. Jedoch darf dieser Wert von x uns nicht auf einen Punkt führen, der über den Grenzen unserer Zeichnung hinausliegt. Dieselbe Figur und Kurve erlaubt ihm, Quadratwurzeln zu ziehen. Wünscht er z. B. die Quadratwurzel von 2,5, so sucht er bloß auf der y-Achse den Punkt Q mit der Ordinate 2,5. Durch diesen Punkt Q legt er alsdann eine Parallele zur x-Achse bis zur Begegnung mit der Kurve in M. Das Maß der Länge QM oder OP ergibt alsdann mit einer gewissen Annäherung den Wert von $\sqrt{2{,}5}$.

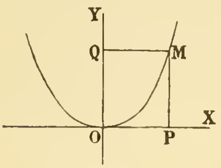


Fig. 101.

Aus der Fig. 101 erkennt man auch, wie x^2 ändert, wenn x von $-\infty$ zu $+\infty$ wächst. Zuerst von sehr großem positivem Wert, nimmt x^2 allmählich ab, wenn x von $-\infty$ bis zu 0 zunimmt. Für diesen letzten Wert ist x^2 auch 0. Wächst hiernach x wieder beständig an, so nimmt x^2 zu, und zwar von 0 bis $+\infty$. Geht x durch den Wert 0 hindurch, so hört x^2 auf, abzunehmen, und fängt an, an Wert zuzunehmen. Für den Wert $x = 0$ ist x^2 geringer als für die benachbarten Werte von x. Diese Eigenschaften drückt man aus, indem man sagt, die Funktion x^2 lasse ein *Minimum* zu für $x = 0$: Der Wert dieses Minimums (der Wert von x^2 für $x = 0$) ist übrigens Null.

Man hat die Kurve als die x-Achse in O berührend gezeichnet. Es läßt sich leicht beweisen, daß die Figur mit der Definition der Tangente übereinstimmt. Zuerst will ich jedoch diese Definition wieder erörtern.

249. Betrachten wir eine beliebige Kurve und einen Punkt A dieser Kurve. A' sei ein Punkt der nämlichen Kurve, der nahe bei A liegt. Verbinden wir A und A' miteinander und nehmen wir an,

A' nähere sich A, indem er stets auf der Kurve bleibt. Die Gerade AA' wird alsdann um den Punkt A drehen. Nehmen wir an, der Punkt A' nähere sich dem Punkte A unaufhörlich; die Gerade AA' nähert sich alsdann einer Grenzlage, d. h. es gibt eine Gerade AT, welche durch A geht und eine solche Richtung hat, daß der Winkel $A'AT$ beliebig klein ist, vorausgesetzt jedoch, daß der Punkt A' auf der Kurve selbst liegt und möglichst nahe an A. Man sagt alsdann, die Gerade AT sei die Tangente der Kurve im Punkte A. Eine Kurve, die im allgemeinen nicht an jedem Punkte eine Tangente zuläßt, verdient in keiner Weise das Beiwort *regelmäßig*. Eine solche Kurve (wenn man sie noch Kurve nennen kann) kann kaum gedacht oder gezeichnet werden*). Gewöhnlich, wie dies in Fig. 102 der Fall ist, erhält man dieselbe Grenzlage, dieselbe Tangente, ob man sich von rechts oder von links dem Punkte A nähere. Man begreift jedoch leicht, daß es an gewissen Punkten anders sein kann und daß man gegebenenfalls in A zwei Tangenten haben kann, die sich nicht gegenseitig verlängern, sondern den beiden Kurvenzweigen entsprechen, die in A enden. Ein solcher Punkt heißt „*Winkelpunkt*“ (Fig. 103).

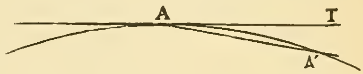


Fig. 102.

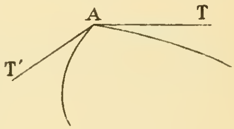


Fig. 103.

Bei der Annahme, daß in A nur eine Tangente sei, oder wenn man will, daß die beiden Richtungen AT, AT' sich gegenseitig verlängern, kommt es gewöhnlich vor, daß, wie dies in der ersten Figur der Fall ist, die Kurve in der Umgebung von A auf einer und derselben Seite der Tangente sich befindet.**) Manchmal kann es vorkommen, daß die Kurve die Tangente durchquert. In Nr. 252 werden wir ein solches Beispiel finden. In diesem Falle heißt der Punkt A *Wendepunkt*. Je mehr Winkelpunkte, je mehr Wendepunkte eine Kurve aufweist, desto unregelmäßiger ist sie.

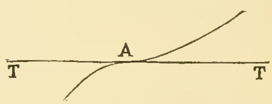


Fig. 104.

*) Auf einer Zeichnung hat eine Kurve, mag sie auch noch so fein gezeichnet sein, immer eine gewisse Dicke. Diese Zeichnung ist keine Kurve im Sinne der *Präzisionsmathematik*. Die Tangente, die man zieht, hat auch ihrerseits eine gewisse Dicke; sie deckt sich teilweise auf einer kurzen Strecke mit der Kurve. Jedoch ist diese Strecke groß in bezug auf die Dicke der Kurve. Siehe *F. Klein, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.* Leipzig, 1902.

**) Gerade diese Eigenschaft, daß die Tangente die Kurve in der Umgebung des Berührungspunktes auf einer und derselben Seite läßt, betrachteten die Alten als Definition der Tangente.

250. Nach diesen Erörterungen kommen wir auf die Kurve $y = x^2$ zurück und suchen wir ihre Tangente in O. Wir nehmen einen Punkt M nahe bei O, d. h. einen Punkt, dessen Abszisse x_1 sehr klein ist. Wenn y_1 die Ordinate dieses Punktes ist, so ist die

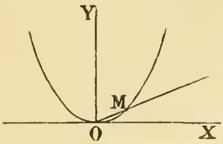


Fig. 105.

Richtungskonstante der Geraden OM $\frac{y_1}{x_1}$ oder $\frac{x_1^2}{x_1} = x_1$, da ja y_1 gleich x_1^2 ist. Nähert nun M sich dem Punkte O, so wird x_1 immer kleiner, die Richtungskonstante der Geraden neigt gegen 0 hin, und diese Gerade nähert sich der Richtung OX, wie wir in Nr. 238 gesehen haben. Sie nähert sich derselben unaufhörlich, je näher x_1 an den Wert 0 heranrückt; OX ist also die Tangente in O.

251. Ist a eine gegebene Zahl, so ist die Funktion ax^2 proportional zu x^2, und sie ändert wie x^2, wenn a positiv ist (Nr. 237). Die Kurve der Gleichung $y = ax^2$ gleicht ganz der eben studierten Kurve mit der Gleichung $y = x^2$. Sie liegt über oder unter dieser Kurve, je nachdem a kleiner oder größer als 1 ist. Die beiden Kurven berühren sich im Nullpunkt.

Betrachten wir a als negativ, und setzen wir $a = -b$; b ist alsdann positiv. Der Leser erkennt gleich, wie die beiden Kurven liegen, deren Gleichungen

$$y = bx^2, \quad y = -bx^2$$

sind. Für einen und denselben Wert von x sind die Werte von y symmetrisch. Die beiden entsprechenden Punkte sind symmetrisch zur

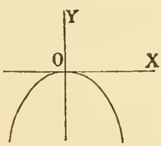


Fig. 106.

x-Achse. Die Kurve der Gleichung $y = ax^2$ hat, wenn a negativ ist, eine Form, welche der aus Fig. 106 ähnlich ist. Man sieht in diesem Falle, daß ax^2 von $-\infty$ bis zu 0 wächst und dann wieder von 0 zu $-\infty$ abnimmt, wenn x von $-\infty$ bis zu 0 und von 0 bis zu $+\infty$ zunimmt. Hat x den Wert 0, so hört ax^2 zu wachsen auf, um wieder gleich abzunehmen. Ihr Wert für $x = 0$ ist größer als für die benachbarten Werte: man sagt deshalb, diese Funktion habe für $x = 0$ ein *Maximum*, dessen Wert 0 ist.

Betrachtet man x, als stelle es die Zeit dar (Nr. 77, 78, 243), zeichnet man ferner die x-Achse horizontal, die y-Achse vertikal, und zwar den positiven Teil nach oben gerichtet; nimmt man endlich die Sekunde als Zeiteinheit und das Zentimeter als Längeneinheit, so gibt die Formel

$$2y = -981x^2$$

für jeden Augenblick x die Ordinate eines beweglichen Körpers, den man ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen läßt, der im Zeitanfang von O ausgeht und nur von der Schwerkraft allein beeinflußt wird. Man geht jedoch von der Annahme aus, die Bewegung geschehe in einem luftleeren Raume, auf einer geographischen Breite, die derjenigen von Paris nahekommt, und die Entfernung vom Boden sei nicht allzu groß. Ich brauche kaum hinzuzufügen, daß x positiv sein muß und in Wirklichkeit nur eine kleine Anzahl Sekunden erreichen kann.

Die Kurven, welche eine Gleichung der Form $y = ax^2$ haben, heißen Parabeln. Der Punkt O ist ihr Scheitelpunkt, die x-Achse ihre Tangente in diesem Punkte und die y-Achse ihre Symmetrieachse.

252. Betrachten wir nunmehr die Kurve, deren Gleichung

$$y = x^3$$

ist. Nehmen wir zuerst an, x wachse von 0 bis zu $+\infty$. Für diesen Teil der Kurve erhält man eine ähnliche Form wie für die Kurve der Gleichung $y = x^2$, wo man x nur durch positive Werte ersetzt. Nur ist zu bemerken, daß, wenn x kleiner ist als 1, x^3 noch kleiner als x^2 und folglich also bei weitem kleiner als x ist. Ist umgekehrt x größer als 1, so ist x^3 größer als x^2, und zwar viel größer, wenn x sehr groß ist. Die neue Kurve nähert sich also in der Umgebung des Nullpunktes mehr der x-Achse, als die alte Kurve dies tat. Für größere Werte jedoch entfernt sie sich weiter von dieser Achse. Man sieht auch leicht, daß sie in O die x-Achse zur Tangente hat.

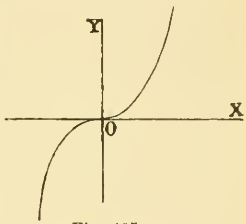


Fig. 107.

Ändern wir x in $-x$ um; x^3 wird alsdann $-x^3$. Gehört also der Punkt mit den Koordinaten x und y zur Kurve, so ist dies auch für den Punkt $(-x, -y)$ der Fall. Es genügt, die Figur zu zeichnen, um zu erkennen, daß dergleichen Punkte symmetrisch zum Nullpunkte liegen. Die gesuchte Kurve besitzt also folgende Eigenschaften: Ist A ein beliebiger Punkt dieser Kurve und ist A' in bezug auf den Nullpunkt symmetrisch zu A, so gehört auch A' der Kurve an. Dies drückt man aus, indem man sagt, der Punkt O sei ein *Zentrum* der Kurve. Diese Eigenschaft erlaubt uns, auf leichte Weise den Teil der Kurve zu zeichnen, welcher den negativen Werten von x entspricht, wenn man den Teil der positiven Werte von x schon kennt.

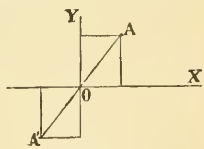


Fig. 108.

Hieraus ersieht man, daß die x-Achse, welche die Tangente in

O darstellt, die Kurve durchschneidet. O ist ein *Wendepunkt* der Kurve.

Wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, so wächst auch die Funktion x^3, welche immer das nämliche Vorzeichen von x hat und mit x Null wird, von $-\infty$ bis $+\infty$.

Hat man die Kurve der Gleichung $y = x^3$ mit Sorgfalt auf ein Blatt Millimeterpapier aufgetragen, so erlaubt diese Kurve, annähernd die Kubikzahl sowie die Kubikwurzel einer gegebenen Zahl zu suchen.

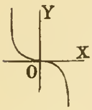


Fig. 109.

Es versteht sich von selbst, daß die Kurve der Gleichung $y = ax^3$, wo a eine positive Zahl darstellt, eine ähnliche Form hat. Dasselbe wäre der Fall für negatives a, aber die Stellung der Kurve wäre alsdann eine andere. Die Kurven der beiden Gleichungen $y = ax^3$, $y = -ax^3$ liegen symmetrisch zur y-Achse. Ist a negativ, und wächst x von $-\infty$ bis $+\infty$, so nimmt ax^3 von $+\infty$ bis $-\infty$ ab.

253. In den Funktionen $ax + b$, ax^2, ax^3, die wir bis jetzt gesehen haben, kann die Veränderliche x beliebige Werte annehmen. Dies ist nicht der Fall für die Funktion $\frac{1}{x}$, die keinen Sinn mehr hat für $x = 0$. Die Kurve der Gleichung $y = \frac{1}{x}$ hat eine bemerkenswerte Eigentümlichkeit aufzuweisen, und zwar für denjenigen Teil, welcher den kleinen Werten von x entspricht.

Betrachten wir positive Werte von x. Ist x ganz klein, so ist $\frac{1}{x}$ ganz groß, und $\frac{1}{x}$ kann einen beliebig großen Wert annehmen, vorausgesetzt, daß x klein genug ist. Auf Parallelen zur y-Achse also, welche sehr nahe an dieser Achse liegen, befinden sich Punkte der Kurve; diese Punkte liegen hoch oben, so hoch als man nur will, wenn die Parallelen nahe genug an der y-Achse liegen. Dies drückt man aus, indem man sagt, y nähert sich $+\infty$, wenn x mit positiven Werten sich der Null nähert, oder anders, die positive y-Achse ist eine *Asymptote* der Kurve.

Wächst der Wert von x, so sinkt derjenige von y oder $\frac{1}{x}$; die Kurve nähert sich der x-Achse. Für $x = 1$ ist auch $y = 1$. Der Punkt, dessen Koordinaten $x = 1$, $y = 1$ sind, liegt auf der Halbierenden des Winkels XOY. Nimmt x beständig zu, so nimmt y beständig ab; die Kurve nähert sich immer mehr der x-Achse. y kann einen beliebig kleinen Wert annehmen, wenn nur der Wert von x groß genug ist. Die Kurve kann beliebig nahe an die x-Achse herankommen, vorausgesetzt, daß man sich ziemlich weit in der

Richtung der positiven x-Achse entfernt. Man kann noch sagen, $\frac{1}{x}$ nähert sich der 0, wenn x sich $+\infty$ nähert, oder: die positive x-Achse ist eine Asymptote der Kurve.

Man kann das Vorhergehende folgendermaßen zusammenfassen: Wächst x von 0 bis $+\infty$, so sinkt $\frac{1}{x}$ oder y von $+\infty$ bis zu 0. Jedoch erreicht y diesen letzten Wert Null nicht für einen endlichen Wert von x.

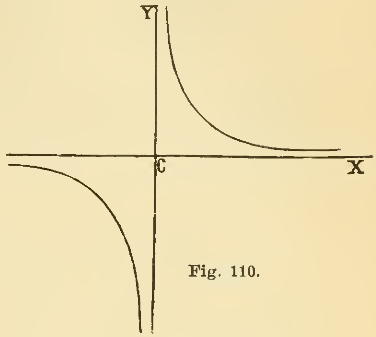


Fig. 110.

Ändert man x in $-x$, so ändert $\frac{1}{x}$ in $-\frac{1}{x}$; gehört der Punkt mit den Koordinaten x, y der Kurve an, so ist dies auch der Fall für den Punkt, dessen Koordinaten $-x$, $-y$ sind. Diese beiden Punkte sind symmetrisch in bezug auf den Nullpunkt. Dieser Nullpunkt ist ein *Zentrum* der Kurve. Kennt man den Kurvenzweig, der den positiven Werten von x entspricht, so kann man sofort den Kurvenzweig der negativen Werte von x davon ableiten. Diese Kurve liegt auch *asymptotisch* zur x-Achse, und zwar zur negativen x-Achse diesmal; auch liegt sie unter dieser Achse, anstatt darüber. y, welches immer das nämliche Vorzeichen wie x hat, hat sehr kleinen absoluten Wert, wenn x sehr groß ist. Der absolute Wert von y steigt, der relative dagegen nimmt ab, wenn x zunimmt, aber negativ bleibt. Wenn x durch negative Werte sich der Null nähert, so nimmt y immer mehr ab Sein absoluter Wert kann beliebig groß werden. Wenn x durch negative Werte sich der 0 nähert, so nähert y sich $-\infty$. Die Kurve liegt asymptotisch zur y-Achse, und zwar zur negativen y-Achse.

Wenn der Wert von x von $-\infty$ bis zu 0 steigt, so fällt y von 0 bis $-\infty$. Nimmt x dann noch beständig von 0 bis $+\infty$ zu, so fällt y von $+\infty$ auf 0. Für $x = 0$ hat die Funktion $\frac{1}{x}$ eigentlich keinen Sinn mehr. Man sagt, die Funktion sei für diesen Wert unendlich, und versteht darunter, daß ihr absoluter Wert beliebig groß sein kann, wenn die Werte von x klein genug an absolutem Werte sind. Man sagt noch, $\frac{1}{x}$ gehe von $-\infty$ auf $+\infty$ über, wenn x mit wachsendem Werte durch 0 geht. Für $x = 0$ ist die Funktion *unstetig*. Desgleichen, wenn man sagt, $\frac{1}{x}$ sei Null für $x = \infty$, so versteht man darunter nur, der absolute Wert von $\frac{1}{x}$ könne beliebig klein sein, vorausgesetzt, daß der absolute Wert von x groß genug sei.

Die Gestalt und die Lage der Kurve, deren Gleichung $y = \frac{a}{x}$ ist, wo a eine positive numerische Konstante darstellt, sind genau dieselben wie im vorhergehenden Falle. Denn $\frac{a}{x}$ ist proportional mit $\frac{1}{x}$. Wächst der Wert von x von $-\infty$ bis 0, dann von 0 bis $+\infty$, so nimmt $\frac{a}{x}$ von 0 bis $-\infty$ ab, geht von $-\infty$ auf $+\infty$ über und sinkt dann von $+\infty$ bis 0.

Ist a eine negative Zahl, so hat die Kurve immer dieselbe Form, aber ihre Lage ist verschieden. Ändert in diesem Falle der Wert von x von $-\infty$ bis 0, dann von 0 bis $+\infty$, so nimmt die Funktion $\frac{a}{x}$ zu, und zwar von 0 bis $+\infty$, dann geht sie von $+\infty$ zu $-\infty$ über, und steigt wieder von $-\infty$ bis 0. Sind die Veränderlichen x, y untereinander verbunden durch die Relation $y = \frac{a}{x}$ oder $xy = a$, so sagt man, y und $\frac{1}{x}$ seien proportional.

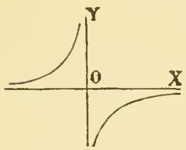


Fig. 111.

Die Kurven, deren Gleichung die Form $xy = a$ hat, wo a eine numerische Konstante ist, heißen *gleichseitige Hyperbeln*.

§ 3. Graphische Methoden zur Lösung numerischer Gleichungen.

254. Es seien

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0$$

zwei Gleichungen ersten Grades, worin A, B, C, A', B', C' gegebene Zahlen darstellen. In Nr. 246 haben wir gefunden, wie man die beiden Geraden D und D', welche den Ort der Punkte darstellen, deren Koordinaten x und y die obigen Gleichungen erfüllen, sehr leicht auf Millimeterpapier zeichnen kann. Die Koordinaten des Schnittpunktes dieser beiden Geraden erfüllen die beiden Gleichungen zugleich. Und wenn umgekehrt die Koordinaten x, y eines Punktes diese beiden Gleichungen zugleich erfüllen, so kann dieser Punkt nur der Schnittpunkt der beiden Geraden sein, da er zugleich auf beiden sich befindet. Das Problem diese *simultanen Gleichungen* zu lösen, d. h. für x, y Werte zu suchen, für welche beide Gleichungen zugleich richtig sind, läßt sich also darauf zurückführen, den Schnittpunkt zweier Geraden zu suchen. Man braucht nur auf der Figur den Zahlenwert der Koordinaten mit ihren Vorzeichen abzulesen. Diese Methode ist übrigens so selbstverständlich, daß ich schon in Nr. 244 ihre Anwendung bei dem Aufstellen der Eisenbahnfahrpläne hervorgehoben habe.

255. Betrachten wir die Gleichung zweiten Grades

$$x^2 + px + q = 0,$$

wo p und q gegebene Zahlen darstellen. Es versteht sich von selbst, daß, wenn diese Gleichung für eine Zahl richtig ist, auch die beiden simultanen Gleichungen

$$y = x^2,$$
$$y + px + q = 0,$$

richtig sind, wenn man den Wert von x beibehält und sein Quadrat durch y darstellt. Umgekehrt wird auch x die Gleichung zweiten Grades erfüllen, wenn die beiden Zahlen x, y die beiden Simultangleichungen erfüllen. Aber die Erörterungen über Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten, die wir oben angestellt, sind auch hier noch richtig; denn es ist klar, daß die Zahlen x, y, für welche die beiden Gleichungen zugleich richtig sind, nichts anderes sind als die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden $y + px + q = 0$ und der Parabel $y = x^2$. Hat man diese Parabel mit Sorgfalt auf das Millimeterpapier aufgetragen, so braucht man nur mehr die Gerade $y + px + q = 0$ nach den Anweisungen aus Nr. 246 zu zeichnen und die Abszissen der Schnittpunkte P, Q der Geraden und der Parabel zu messen. Auf diese Art und Weise erhält man die Näherungswerte der Wurzeln der Gleichung zweiten Grades. Die nämliche Parabel kann alle Gleichungen zweiten Grades lösen helfen, wenn man sie mit Tinte auszieht, die Gerade dagegen nur mit Bleistift zeichnet, um sie wieder ausradieren zu können, wenn man die Lösung gefunden hat. Die Größe unserer Zeichnung kann jedoch hier einschränkend wirken.

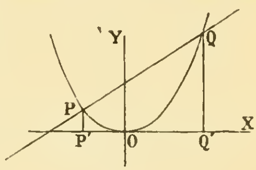


Fig. 112.

256. Die Gerade, deren Gleichung $y + px + q = 0$ ist, wird die Parabel, deren Gleichung $y = x^2$ ist, schneiden oder nicht schneiden, je nachdem die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ Wurzeln hat oder nicht. Besteht die Beziehung

$$\frac{p^2}{4} - q > 0,$$

so schneidet die Gerade die Parabel in zwei verschiedenen Punkten, deren Abszissen (Nr. 206)

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

sind und die als Ordinate x'^2 und x''^2 haben. Der Unterschied dieser beiden Abszissen ist

$$x' - x'' = 2\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Dieser Unterschied ist sehr gering, wenn $\frac{p^2}{4} - q$ sehr klein ist. Für $q = \frac{p^2}{4}$ wird dieser Unterschied Null. Die beiden Wurzeln sind alsdann gleich $-\frac{p}{2}$, und die Gerade $y + px + q = 0$ oder vielmehr

$$y + px + \frac{p^2}{4} = 0$$

kann angesehen werden als eine Gerade, welche die Parabel in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet. Diese Punkte haben zur Abszisse $-\frac{p}{2}$. Ich glaube, auch ohne daß ich mich hierbei aufhalte, sieht der Leser doch sofort ein, daß in diesem Falle die Gerade eine Tangente der Parabel wird, und zwar in dem Punkte, der $-\frac{p}{2}$ zur Abszisse und $\left(-\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$ zur Ordinate hat. Es ist dies ein Beispiel einer allgemeinen Methode, um die Tangenten zu finden. Das Prinzip dieser Methode verdanken wir Descartes.

257. Dieselbe Methode wendet man an, um die Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

zu lösen, wo p, q gegebene Zahlen sind.

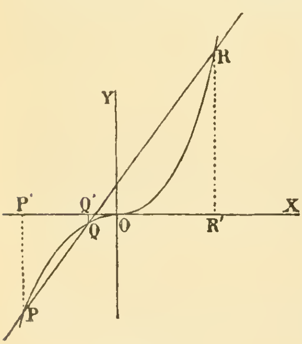


Fig. 113.

Die Werte von x, für welche diese Gleichung richtig ist, sind die Abszissen der Schnittpunkte der Kurve $y = x^3$ und der Geraden $y + px + q = 0$. Hat man einmal die Kurve mit Sorgfalt auf Millimeterpapier gezeichnet, so bietet die Zeichnung der Geraden kaum noch Schwierigkeit, wenn man die Zahlen p, q kennt.

Die Abszissen der Schnittpunkte, deren Wert sich sogleich aus der Einteilung des Blattes ergibt, liefern den Näherungswert der Wurzeln der Gleichung.

258. Kennt man den Näherungswert einer Wurzel einer Gleichung, so kann man einen genaueren Wert erhalten mittels einer Methode, die wir Newton verdanken und die wir schon in Nr. 180 angewandt haben, um die Quadratwurzel einer Zahl zu rechnen. Wir wollen diese Methode auf die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ anwenden.

a bedeute den Näherungswert der Wurzel einer Gleichung und $a + h$ den richtigen Wert derselben. Wir nehmen an, h sei sehr klein. Man hat alsdann

$$(a + h)^3 + p(a + h) + q = 0,$$

woraus sich ergibt (Nr. 179)

$$a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 + pa + ph + q = 0.$$

Ist h ganz klein, so sind h^2 und h^3a fortiori noch kleiner, und man kann auf der ersten Seite der vorhergehenden Gleichung die Glieder $3ah^2$ und h^3 weglassen. Man erhält dann ungefähr

$$a^3 + pa + q + 3a^2h = 0$$

und folglich wiederum ungefähr

$$h = -\frac{a^3 + pa + q}{3a^2}.$$

Gibt man h diesen Wert, so erhält man für den Ausdruck $a + h$

$$a_1 = a - \frac{a^3 + pa + q}{3a^2}.$$

Diese Wurzel a_1 ist in der Regel genauer als a. Dies könnte man strenger beweisen, indem man den begangenen Fehler berechnete. Übrigens kann man nochmals anfangen und a_1 statt a setzen; auf diese Weise nähert man sich der gesuchten Wurzel immer mehr.

§ 4. Gleichungen einiger geometrisch definierten Kurven.

259. Die Funktionen der Veränderlichen x, die wir in den vorhergehenden Nummern besprochen haben, oder wenn wir wollen, die Gleichungen, die wir erhielten, indem wir y diesen Funktionen gleichsetzten, waren a priori gegeben, und man stellte sich nur die Aufgabe, die Form der Kurven dieser Gleichungen zu studieren. Jetzt suchen wir folgendes Problem zu lösen. Man kennt eine Kurve nur nach ihrer geometrischen Definition; es soll eine Gleichung zwischen x, y, die für die Koordinaten aller Punkte dieser Kurve, und nur für diese richtig ist, gefunden werden. Diese Lösung erhält man, indem man die geometrische Definition analytisch ausdrückt. Einige einfache Beispiele mögen dies kurz erläutern.

260. Betrachten wir einen Kreis mit dem Zentrum O und dem Radius r. Wir zeichnen ihn in ein rechtwinkliges Koordinatensystem OX, OY, das seinen Nullpunkt im Zentrum des Kreises selbst hat. Das charakteristische Merkmal der Punkte eines Kreises besteht darin, daß alle gleichweit (um eine Strecke r) vom Punkte O entfernt sind. Ist nun M ein beliebiger Punkt der Ebene und bezeichnet man mit x, y seine Koordinaten, so gibt uns das rechtwinklige Dreieck OMP

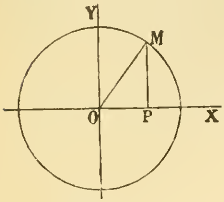


Fig. 114.

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = x^2 + y^2.$$

Diese Relation bleibt bestehen, welches auch immer die Vorzeichen von x, y seien, denn diese Zahlen kommen nur im Quadrat darin vor. Die Gleichung des Kreises ist also

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

sie wird von allen Punkten des Kreises erfüllt und nur von diesen.

261. *Einiges über Kreisfunktionen.* In Nr. 149 habe ich den Sinus, Kosinus und die Tangente eines Winkels definiert. Jetzt will ich erklären, was man unter dem Sinus, Kosinus und der Tangente einer beliebigen *Zahl* t versteht, oder, wenn man will, unter dem Sinus, Kosinus und der Tangente eines *Bogens*. Im folgenden werden die Bogen nicht mehr nach Graden, nicht mehr nach Zentesimalgraden, sondern nach Halbmessern abgeschätzt (Nr. 217).

Betrachten wir einen Kreis, der als Radius die Längeneinheit hat. Dieser Kreis möge in zwei Koordinatenachsen gezeichnet sein, welche sich im Zentrum O des Kreises schneiden. Die x-Achse schneidet den Kreis in den Punkten A, A'; A liegt auf der positiven Hälfte der x-Achse. Desgleichen schneidet die y-Achse den Kreis in zwei Punkten B, B'; B liegt auf der positiven Hälfte der y-Achse.

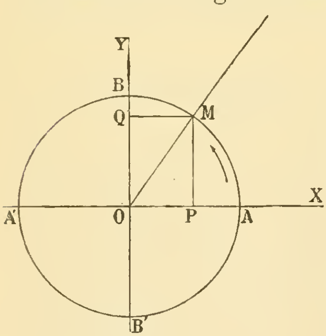


Fig. 115.

Betrachten wir den Punkt A als den Nullpunkt der Bogen auf dem Kreise und wählen wir (Nr. 217) die Richtung des Pfeiles als die positive. Es ist dies die Richtung eines beweglichen Punktes, der von A nach B geht. Die Lage eines beliebigen Punktes M auf dem Kreise, der verschieden ist von A', kann durch eine relative Zahl t bestimmt werden, deren absoluter Wert kleiner als π ist;

durch die Zahl nämlich, deren absoluter Wert die Länge AM des Bogens mißt, den man durchlaufen muß, um von A nach M zu gelangen. Dieser Bogen ist kürzer als ein halber Kreisumfang, und er hat das Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem man ihn in positiver oder negativer Richtung durchlaufen muß. Dies habe ich schon in Nr. 207 erklärt. Für die Lage des Punktes A', der dem Punkte A diametral entgegenliegt, kann man als bestimmende relative Zahl eine der beiden $+\pi$ oder $-\pi$ wählen.

Es sei umgekehrt eine beliebige Zahl t gegeben. Denken wir uns einen beweglichen Punkt, der von A als Ausgangspunkt sich auf dem Kreise bewegt. Diese Bewegung geschieht in positiver Richtung, wenn t positiv, in entgegengesetzter, wenn t negativ ist. Ferner bewegt sich der Punkt beständig in einer Richtung, ohne zu oszillieren. Halten wir ihn in dem Augenblick auf, wo der Weg, den er zurückgelegt hat, mit der gewählten Längeneinheit, dem Kreisradius gemessen, gleich dem absoluten Werte der Zahl t ist*). M möge diese Lage sein. Man sieht, daß jedem Werte von t, ohne Zweideutigkeit, ein Punkt M des Kreises entspricht. Die Abszisse und die Ordinate dieses Punktes sind durch Definition, der Kosinus und der Sinus der Zahl t und werden durch $\cos t$ bzw. $\sin t$ dargestellt.

Ist t zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ enthalten, so liegt M augenscheinlich zwischen den Punkten A und B, und die vorhergehende Definition stimmt mit der aus Nr. 149 überein, wenn man übereinkommt, die Zahl t darin durch den spitzen Winkel AOM zu ersetzen. Dies ergibt sich ganz klar aus der Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks OPM (Fig. 115). Die Tabellen, von denen wir in Nr. 149 gesprochen haben und welche die Werte des Sinus und Kosinus geben für Werte des Winkels, die sich in kurzen Intervallen aufeinander folgen, können dazu dienen, die Werte der Zahlen $\cos t$ und $\sin t$ zu suchen, wenn t zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Hat man z. B. eine Tabelle zur Hand, die für jede Minute den Sinus und den Kosinus angibt, so sucht man, wieviel Grade und Minuten im Bogen enthalten sind, dessen Länge t ist (Nr. 217, Fußnote). Die Tabelle liefert für $\cos t$ und $\sin t$ Näherungswerte. Übrigens findet man in den Anmerkungen dieser Tabellen sehr gute Anweisungen, wie man verfahren muß, um aus diesen Tabellen die möglichst beste Annäherung zu finden.

Ich will mich übrigens auf diejenigen Werte von t beschränken,

*) Ist dieser Wert größer als 2π, so beschreibt der Punkt mehrmals den ganzen Kreisumfang.

welche π an absolutem Wert nicht übersteigen. Man kann dies immer tun, indem man den angegebenen Wert von t durch einen anderen Wert ersetzt, der absolut genommen geringer als π ist und dem Punkte M entspricht, den die Zahl t auf dem Kreis bestimmt. Diesen Wert kann man leicht ausrechnen.

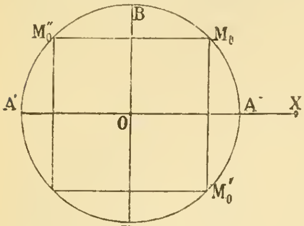


Fig. 116.

Zuerst sieht man, daß für zwei symmetrische Werte von t, t_0 und $-t_0$ z. B. sich zwei Lagen M_0 und M_0' des Punktes M entsprechen, die symmetrisch zur x-Achse liegen (Fig. 116). Die beiden Punkte M_0 und M_0' haben gleiche Abszisse, und ihre Ordinaten sind symmetrische Zahlen. Mit andern Worten, die Kosinus der Zahlen $-t$ und $+t$ sind gleich, die Sinus der Zahlen $-t$ und t jedoch symmetrische Zahlen. Diese Überlegung führt die Berechnung des Kosinus und des Sinus einer negativen Zahl auf die Berechnung des Kosinus und des Sinus einer positiven Zahl zurück.

Nehmen wir jetzt an, t sei eine positive Zahl und liege zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π. Diesem Werte von t entspricht eine bestimmte Lage des Punktes M zwischen B und A', der Punkt M_0'' z. B. Bezeichnet man durch M_0 denjenigen Punkt, der mit M_0'' symmetrisch zur y-Achse liegt, so befindet sich dieser Punkt zwischen A und B, und man sieht auf der Figur, daß der Bogen AM_0 sich symmetrisch zum Bogen $A'M_0''$ verhält und gleiche Länge hat. Diese Länge wird augenscheinlich dargestellt durch die Zahl $\pi - t$, welche zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Die beiden Punkte M_0 und M_0'' haben aber symmetrische Abszissen und gleiche Ordinaten: daraus schließt man, daß die beiden Bogen t und $\pi - t$ als Kosinus zwei symmetrische und als Sinus zwei gleiche Zahlen haben.*) Das Übereinkommen, das wir gegen Ende der Nr. 149 getroffen haben in bezug auf die Werte des Sinus und des Kosinus zweier Supplementwinkel, trifft auch hier noch zu. Die Berechnung des Sinus und Kosinus einer Zahl,

*) Ich halte mich nicht länger dabei auf, zu beweisen, daß dieser Satz bestehen bleibt, welches auch immer die relative Zahl t sei. Ebenso beweise ich hier nicht, daß der Kosinus und der Sinus einer Zahl $\frac{\pi}{2} - t$ immer dem Sinus resp. Kosinus der Zahl t gleich sind. Für den Fall, wo t zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, erhellt dies aus dem in Nr. 149 Gesagten.

die zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegt, läßt sich zurückführen auf die Berechnung des Sinus und Kosinus einer Zahl, die zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt.

Legt man den Punkt M der Reihe nach in A, B, A', so folgt sofort:

$$\cos 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \qquad \sin 0 = \cos\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\cos\pi = -1, \qquad \sin\pi = 0.$$

Was die Tangente der Zahl t anbelangt, so ist diese durch Definition die Richtungskonstante der Geraden, welche den Nullpunkt mit dem Punkte M verbindet. M ist der Punkt des Kreises, welcher der Zahl t entspricht. Man hat also (Nr. 238)

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Für den Leser ist es von Nutzen, die Variationen zu studieren, welche $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$ erleiden, wenn t von $-\pi$ bis zu $+\pi$ anwächst. Im besondern kann er alsdann die Kurven konstruieren, welche die folgenden Gleichungen haben:

$$y = \sin x, \; y = \cos x, \; y = \operatorname{tg} x.$$

Die Funktionen $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, deren vollständige Definition ich geben wollte, haben sehr interessante Eigenschaften. In allen Teilen der Mathematik, in der Geometrie, in der Analysis und der höheren Arithmetik spielen sie eine bedeutende Rolle*). Man bezeichnet sie mit dem Namen „*Kreisfunktionen*".

262. Im folgenden werde ich die Gleichung eines Kreises nötig haben, der durch den Nullpunkt geht und sein Zentrum auf der x-Achse hat. Man findet diese Gleichung auf dieselbe Art und Weise wie für einen Kreis, der den Nullpunkt im Zentrum hat.

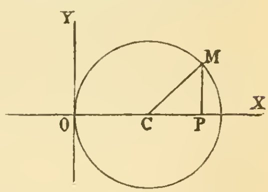


Fig. 117.

r sei der Radius und C das Zentrum des Kreises. Die Abszisse des Punktes C ist r, wenn wir annehmen, der Punkt C liege auf der positiven x-Achse. Es sei M ein beliebiger Punkt der Ebene; das Dreieck MCP, das in P rechtwinklig ist, ergibt alsdann

$$MC^2 = CP^2 + PM^2.$$

*) „. . . Cui mirabili quantitatum generi, ad quod in disquisitionibus maxime heterogeneis saepissime deferimur, cujusque subsidio nulla universae matheseos pars carere potest." (Gauß, Disquisitiones arithmeticae, n⁰ 335.)

Nun aber ist $\overline{CP} = x - r$, $\overline{PM} = y$. Man drückt aus, daß der Punkt M dem Kreis angehört, indem man schreibt, das Quadrat der Entfernung MC sei gleich r^2. Man erhält auf diese Art und Weise

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2,$$

oder, wenn man $(x - r)^2$ ersetzt durch $x^2 - 2rx + r^2$

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0.$$

Räsonniert man wie in Nr. 250, so liefert diese Gleichung den Beweis, daß die y-Achse oder die Senkrechte zu OC die Tangente des Kreises in O ist (Nr. 265).

263. Die Parabel wird definiert als der geometrische Ort aller Punkte, die gleichweit entfernt sind von einem bestimmten festen Punkte, dem *Brennpunkte*, und einer festen Geraden, der *Leitlinie.*

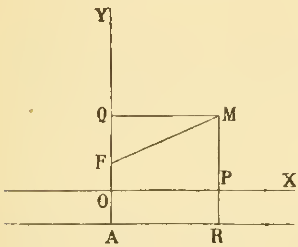


Fig. 118.

Um die Gleichung der Kurve in der nämlichen Form wie in Nr. 251 zu erhalten, nehme ich als y-Achse die Senkrechte, welche man vom Brennpunkt F auf die Leitlinie fällen kann. Als Nullpunkt wähle ich die Mitte O dieser Senkrechten. Die positive Richtung der y-Achse ist die Richtung von O nach F. Als x-Achse nehmen wir die Parallele, welche man durch O zur Leitlinie AR zieht. O ist augenscheinlich ein Punkt dieses Ortes.

Um also auszudrücken, daß ein Punkt M diesem Orte angehört, muß man schreiben, die Entfernung MF des Punktes M vom Brennpunkt sei gleich der Entfernung MR des Punktes M von der Leitlinie.

Die Entfernung des Brennpunktes zur Leitlinie bezeichnen wir mit p. Die Ordinate des Brennpunktes F ist alsdann $\frac{p}{2}$. Das Dreieck MFQ, das in Q rechtwinklig ist, liefert die Relation

$$MF^2 = FQ^2 + QM^2.$$

Bezeichnet man übrigens die Koordinaten OP und OQ des Punktes M mit x, y, so erhält man

$$\overline{FQ} = \overline{OQ} - \overline{OF} = y - \frac{p}{2}, \quad QM = OP = x.$$

Andrerseits ist die Entfernung des Punktes M zur Leitlinie gleich AQ, und man erhält

$$\overline{AQ} = \overline{AO} + \overline{OQ} = \frac{p}{2} + y;$$

drückt man aus, die Quadrate der Entfernungen MF, MR seien gleich, so erhält man die notwendige und hinreichende Bedingung, damit ein Punkt M der Parabel angehöre. Die Gleichung dieser ist also

$$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2} + y\right)^2,$$

oder

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} + py + y^2$$

und schließlich

$$x^2 = 2py.$$

264. Betrachten wir noch die Kurve, welche folgendermaßen definiert wird.

Gegeben ist ein Kreis mit dem Zentrum C. Auf diesem Kreise alsdann zwei Punkte O und A, welche einander diametral entgegenliegen; man zeichnet die Tangente in A (senkrecht auf OA), alsdann zieht man durch O eine veränderliche Sekante, welche den Kreis in B und die Tangente in D schneidet. Auf dieser Sekanten nimmt man eine Länge OM gleich BD, so daß der Vektor OM dieselbe Richtung hat wie der Vektor BD. Es soll die Kurve untersucht werden, welche der Punkt M beschreibt, wenn die Sekante um den Punkt O dreht.

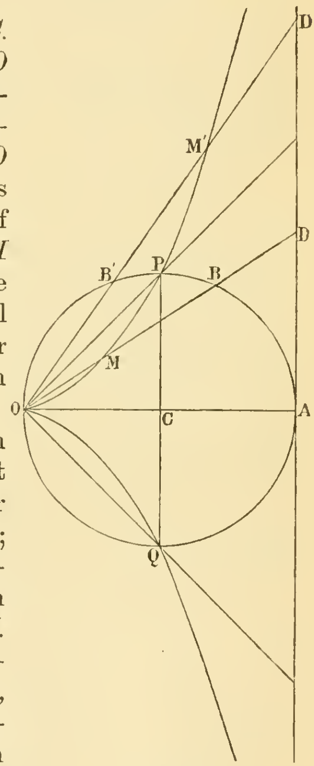


Fig. 119.

Man kann sich leicht über die Form dieser Kurve Rechenschaft geben. Zuerst sieht man gleich, daß sie symmetrisch ist, und zwar den Durchmesser OA zur Symmetrieachse hat; denn zwei Lagen der Sekanten, welche symmetrisch zum Durchmesser sind, entsprechen zwei symmetrische Stellungen des Punktes M. Es genügt, die Hälfte der Kurve zu konstruieren. Zu diesem Zwecke nimmt man an, die Sekante $OMBD$ drehe von einer Anfangsstellung OA an, in positiver Richtung um den Punkt A. Wir wollen versuchen, den Punkt M bei dieser Bewegung im Auge zu behalten. Es ist klar, daß der Punkt B den Halbkreis APO beschreibt; jeder Lage von B entspricht nun eine Lage des Punktes M. Ist B in A, so ist BD Null und OM desgleichen. Der Punkt M befindet sich in O, und dieser ist der Ausgangspunkt der Kurve. Je höher der Punkt B steigt, desto größer wird BD oder OM. Ist der Punkt B in P, also am Endpunkte des senkrechten Radius auf OA, so sieht man gleich, daß auch M in P liegt. Nehmen wir an, B überschreite den Punkt P und komme z. B. in B'. In diesem Falle legt man sich die Form der Kurve bequem zurecht, indem man auf der Sekante $D'M'$ von D' als Ausgangspunkt eine Länge $B'O$ abtrennt, d. h. man nimmt OM' gleich $B'D'$. Nähert B' sich O, so sieht man, daß $B'O$ und dadurch auch $D'M'$ sich der Null nähern. Da $D'M'$ größer ist als die Entfernung des Punktes M' zur Geraden AD, so muß M' immer näher an diese Gerade heranrücken. Andrerseits sucht jedoch wieder OB'' senkrecht auf OA zu stehen zu kommen und sich parallel zu der Geraden AD zu legen. Der Punkt D' und folglich auch der Punkt M' entfernen sich immer mehr, und man erhält schließlich eine Kurvenhälfte, die sich ins Unendliche hinzieht und immer näher an die Gerade AD heranrückt. Diese Kurvenhälfte verläuft asymptotisch zur Tangente des Kreises in A.

Das Vorhergehende erlaubt, die Form der Kurve zu studieren, von der man möglichst viele Punkte konstruieren und die man also selbst mit beliebig großer Genauigkeit zeichnen kann. Die in Frage stehende Kurve geht vom Punkte O aus, steigt und nähert sich der Geraden AD, die eine Asymptote der Kurve ist. Im Punkte P schneidet sie den Kreis. In O berührt sie die Gerade OA, denn wir haben gefunden, daß der Punkt M sehr nahe an O zu liegen kommt, wenn die Sekante $OMBD$ nahe an OA heranrückt. OA kann angesehen werden als die Grenzlage der Sekante OM für den Fall, wo M sich dem Punkte O nähert.

Die Symmetrie der Kurve zu OA als Achse, auf die wir zu Anfang aufmerksam gemacht haben, erlaubt, die Kurve ganz zu zeichnen.

Man findet, daß die Kurve in O eine sehr eigentümliche Form hat. Nimmt man zwei Punkte MN, die diesseits und jenseits von O auf der Kurve liegen, und zieht man durch diese Punkte die Sekanten OM und ON, so nähern sich diese beiden Geraden der Geraden ON, wenn M und N sich O nähern. Für gewöhnliche Punkte ist dies nicht der Fall, vielmehr suchen dort die beiden Sekanten entgegengesetzte Richtungen auf. Der Punkt O heißt *„Rückkehrpunkt“* der Kurve. Solche Punkte nennt man *singuläre* Punkte.

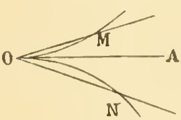


Fig. 120.

Wir kommen jetzt zur *Gleichung* der Kurve, die wir oben definiert haben. Wir nehmen den Durchmesser OA als x-Achse, den Punkt O als Nullpunkt, und die Richtung von O nach A hin sei die positive. Als y-Achse wählen wir die Senkrechte zu OA im Punkte O.

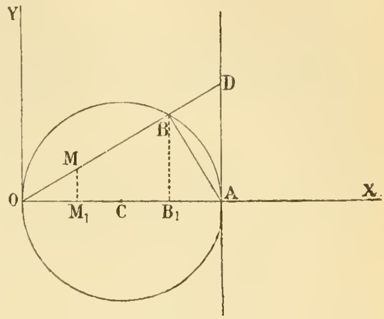


Fig. 121.

Man muß die Relation, welche zwischen den Koordinaten des Punktes M bestehen muß und welche ausdrückt, daß $OM = BD$, und OM dieselbe Richtung wie BD habe, in eine Formel einkleiden. B und D sind die Schnittpunkte der Geraden OM mit dem Kreise und der Senkrechten zu OA in A. Bezeichnet man mit M_1 und B_1 die Fußpunkte der Senkrechten, die man von M und B auf OA fällen kann, so genügte es, auszudrücken, daß OM_1 gleich B_1A sei und nämliche Richtung habe. Mit anderen Worten, man braucht nur zu schreiben, daß

$$\overline{OM_1} = \overline{B_1A}.$$

$\overline{OM_1}$ ist die Abszisse des Punktes M; $\overline{B_1A}$ ist gleich $\overline{OA} - \overline{OB_1}$. Bezeichnet man mit r den Radius des Kreises, so ist OA gleich $2r$. Kann man die Zahl $\overline{OB_1}$, d. h. die Abszisse des Punktes B mittels der Koordinaten des Punktes M ausdrücken, so gibt uns die Gleichung

$$\overline{OM_1} = 2r - \overline{OB_1}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung, damit der Punkt M der Kurve angehöre.

Wir wollen jetzt durch x', y' die Koordinaten des Punktes M darstellen und die Abszisse des Punktes B ausrechnen. Dieser Punkt B ist der Schnittpunkt der Geraden OM mit dem Kreise, der OA als Durchmesser hat.

Die Gerade OM verbindet den Punkt O mit dem Punkte M, dessen Koordinaten x', y' sind; das Verhältnis $\frac{y}{x}$ der Koordinaten x, y eines beliebigen Punktes dieser Geraden ist also gleich $\frac{y'}{x'}$ (oder wenn man will, der Richtungskoeffizient der Geraden OM). Mit anderen Worten, die Gleichung dieser Geraden ist:

$$(1) \qquad \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} \quad \text{oder} \quad y = \frac{y'}{x'}\,x.$$

In Nr. 262 fanden wir für die Gleichung des Kreises:

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0. \tag{2}$$

Haben nun der Kreis und die Gerade einen Punkt gemeinsam, so müssen seine Koordinaten diese beiden Gleichungen zugleich erfüllen, und die Abzsisse eines solchen Punktes muß die Gleichung:

$$x^2 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2 x^2 - 2rx = 0 \tag{3}$$

erfüllen. Diese Gleichung erhält man, indem man in der Gleichung (2) y durch seinen aus Gleichung (1) gezogenen Wert ersetzt.

Ersetzt man in Gleichung (3) $\left(\frac{y'}{x'}\right)^2$ durch $\frac{y'^2}{x'^2}$ und multipliziert man die beiden Seiten mit x'^2, so erhält man

$$x'^2 x^2 + y'^2 x^2 - 2rx'^2 x = 0,$$

oder auch

$$x^2(x'^2 + y'^2) - 2r\,x'\,x = 0.$$

Dieses ist eine Gleichung zweiten Grades in x, und der Leser kann sie als solche lösen. Jedoch ist dies unnütz. Denn das erste Glied ist das Produkt des Faktors $x\,(x'^2 + y'^2) - 2r\,x'$ mit x, und dieses Produkt kann nur Null sein, wenn x Null ist oder wenn der zweite Faktor Null ist. In diesem Falle erhält man

$$x = \frac{2r\,x'}{x'^2 + y'^2};$$

mit anderen Worten: Dieser letzte Wert von x und 0 sind die beiden Wurzeln der Gleichung zweiten Grades. Es sind dieses die Abszissen derjenigen Punkte, wo die Gerade OB den Kreis schneidet. 0 ist ohne Zweifel die Abszisse des Punktes O, die Abszisse des Punktes B dagegen ist

$$OB_1 = \frac{2r\,x'}{x'^2 + y'^2}.$$

Die Gleichheit $OM_1 = 2r - OB_1$ läßt sich also folgendermaßen schreiben:

$$x' = 2r - \frac{2r\,x'^2}{x'^2 + y'^2}.$$

Dieses ist die notwendige und hinreichende Bedingung, damit ein Punkt mit den Koordinaten x', y' der angegebenen Kurve angehöre. Ersetzen wir x', y' durch x, y und multiplizieren wir die beiden Seiten durch $x^2 + y^2$, so erhalten wir die Gleichung der Kurve unter anderer Form:

$$x\,(x^2 + y^2) = 2r\,(x^2 + y^2) - 2r\,x^2 = 2r\,y^2.$$

Die Art und Weise, wie ich zu der Gleichung dieser Kurve und im speziellen zu dem Ausdruck

$$\overline{OB_1} = \frac{2r\,x'^2}{x'^2 + y'^2}$$

gelangt bin, mag vielleicht dem Leser lang und schwierig geschienen haben. Ich bezweckte damit, ihm an einem Beispiel die Anwendung der Methode der analytischen Geometrie klar zu zeigen. Diese Methode besteht darin, die Geraden und Kurven einer geometrischen Figur nur in ihren Gleichungen zu betrachten und die Schnittpunkte zweier Linien durch die Auflösungen zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzufinden. Nimmt der Leser diese Methode im Prinzip an, so merkt er gleich, wie einfach und selbstverständlich der von uns eingeschlagene Weg war. Um die Koordinaten des Punktes B von denen des Punktes M abzuleiten, braucht man sich nur zu erinnern, wie das Verhältnis dieser beiden Punkte in der Definition der Kurve bestimmt ist. Was die Rechnung selbst betrifft, so erfordert diese nicht die geringste Anstrengung für denjenigen, der nur wenig an Algebra gewohnt ist.

Übrigens kann man auch leicht mit Hilfe der elementaren Geometrie zu dieser Formel gelangen. Erwägungen dieser Art kommen manchem Leser vielleicht bekannter vor. Die Gerade AB kann angesehen werden als die Höhe des Dreiecks OAB, das in A rechtwinklig ist; der Winkel ABO ist nämlich in einen Halbkreis eingezeichnet und hat deshalb 90^0. Hieraus folgt gemäß Nr. 145

$$\overline{OA}^2 = OB \cdot OD,$$

woraus man ableitet

$$\frac{\overline{OA}^2}{\overline{OD}^2} = \frac{OB}{OD} = \frac{OB_1}{OA}.$$

Die letzte Gleichheit kommt daher, daß die Geraden BB_1, AD parallel sind. Andererseits ergibt die Gleichheit der Dreiecke OM_1M, OAD,

$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{OA}{OD}; \qquad \frac{OM_1{}^2}{OM^2} = \frac{OA^2}{OD^2}.$$

Vergleicht man diese Gleichheiten mit den vorhergehenden, so findet man, daß

$$\frac{OM_1{}^2}{OM^2} = \frac{OB_1}{OA}, \qquad OB_1 = \frac{OM_1{}^2}{OM^2} \cdot OA;$$

diese letzte Gleichung haben wir vorhin nötig gehabt, denn OM_1 ist die Abszisse x' des Punktes M und OM^2 ist gleich $OM_1{}^2 + M_1M^2$ oder gleich $x'^2 + y'^2$, wie das in M rechtwinklige Dreieck OM_1M beweist.

Zweifellos findet jeder, der nur irgendwie in die Geometrie eingeweiht ist, diese Relationen mit leichter Mühe; jedoch ohne allen Scharfsinn und ohne alle Anstrengung gelingt ihm dies doch nicht. Die analytische Methode erhebt keine solchen Ansprüche.

Wir kommen nun zur Gleichung der Kurve

$$2ry^2 = (x^2 + y^2)x$$

zurück und weisen nach, wie man aus dieser Gleichung die Form der Kurve erkennen kann. Zuerst erhält man

$$(2r - 2)y^2 = x^3 = x^2 \cdot x,$$

$$y^2 = x^2 \frac{x}{2r - x}, \quad y = \pm x \sqrt{\frac{x}{2r - x}};$$

die beiden Vorzeichen $\pm$ auf der zweiten Seite zeigen die Symmetrie der Kurve zur x-Achse an; denn zwei Punkte, deren Abszissen gleich und deren Ordinaten symmetrisch sind, liegen symmetrisch zur x-Achse.

Es genügt also, eine Kurvenhälfte zu zeichnen; die der Gleichung

$$y = x \sqrt{\frac{x}{2r - x}}.$$

Das zweite Glied hat nur einen Sinn, wenn $\frac{x}{2r - x}$ positiv ist. Diese Bedeutung erfordert, daß x selbst positiv sei und kleiner als $2r$. Denn ist x negativ, so ist $2r - x$ positiv, und ist x positiv und größer als $2r$, so ist $2r - x$ negativ. In beiden Fällen haben Zähler und Nenner des Bruches verschiedene Vorzeichen, der Bruch ist also negativ. Mit anderen Worten, y ist nur dann eine bestimmte Funktion von x, wenn der Wert dieser Veränderlichen sich zwischen 0 und $2r$ bewegt. Steigt x von 0 zu $2r$, wird x also größer, so nimmt $2r - x$ ab und der Bruch $\frac{x}{2r - x}$ wird größer. Dasselbe ist der Fall für die Quadratwurzel dieses Bruches und für das Produkt dieser Quadratwurzel mit x. Solange also x zwischen 0 und $2r$ an Wert zunimmt, solange nimmt auch y zu. Für $x = 0$ ist auch $y = 0$. Die Kurve hat also in 0 ihren Ausgangspunkt. Nähert sich der Wert von x dem Werte $2r$, so ist $2r - x$ ganz klein. Der Zähler des Bruches $\frac{x}{2r - x}$ ist also annähernd $2r$ und der Nenner sehr nahe bei 0. Dieser Bruch kann einen beliebig großen Wert annehmen, wenn nur x möglichst nahe an $2r$ heranrückt. Dasselbe ist wiederum der Fall für die Quadratwurzel

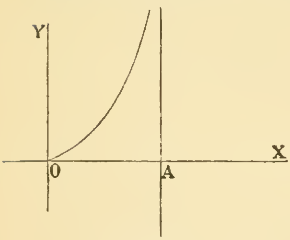


Fig. 122.

dieses Bruches und für das Produkt dieser Wurzel mit x (der Wert von x kommt dem Werte $2r$ sehr nahe). Nähert x sich dem Werte $2r$, so wächst y ins Unendliche. Die Kurve erläuft asymptotisch zur Parallelen zur y-Achse, deren Gleichung $x = 2r$ ist.

Betrachtet man endlich einen beliebigen Punkt M der Kurve, dessen Koordinaten x_1 und y_1 sind, so sieht man, daß der Richtungskoeffizient $\frac{y_1}{x_1}$ der Geraden OM gleich

$$\sqrt{\frac{x_1}{2r - x_1}}$$

ist. Dieser Richtungskoeffizient wird Null, wenn x_1 Null wird, d. h. wenn M sich dem Punkte 0 nähert. Im Punkte 0 bildet die x-Achse also die Tangente der Kurve. Wir haben also alles wiedergefunden, was wir wissen müssen, um die Form der Kurve kennen zu lernen. Wir vollenden die Zeichnung, indem wir der Symmetrie der Kurve zur x-Achse Rechnung tragen.

Wollen wir die Koordinaten der Schnittpunkte der Kurve mit dem um OA als Durchmesser geschlagenen Kreise kennen, so müssen wir folgende zwei Gleichungen auflösen:

$$(x^2 + y^2)x - 2ry^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0.$$

Ersetzen wir in der ersten $x^2 + y^2$ durch $2rx$, so erhalten wir

$$2rx^2 = 2ry^2; \quad x^2 = y^2; \quad y = \pm x.$$

Man wird also auf die Auflösung folgender Gleichungen zurückgeführt:

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0,$$

$$y = x,$$

und andererseits

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0,$$

$$y = -x.$$

Dem Leser überlasse ich es, diese Rechnungen durchzuführen; er wird alsdann die drei Schnittpunkte O, P, Q der Zeichnung (Fig. 119) finden.

Die Kurve, die wir eben studiert haben, heißt Zissoïde des Diokles.

VII. Kapitel.

Tangente, Geschwindigkeit, Ableitung.

§ 1. Geometrisch bestimmte Tangenten.

265. In Nr. 249 haben wir gesagt, was man unter der Tangente einer Kurve im Punkte M versteht. Verbindet man zwei benachbarte Punkte M und M' einer Kurve durch eine Sekante MM', so ist die Tangente eine Gerade MT, welcher sich die Sekante MM' immer mehr nähert, je mehr der Punkt M' an M heranrückt. Man sagt, in diesem Falle sei die Tangente die Grenzlage der Sekante.

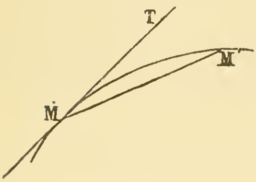


Fig. 123.

Es ist vielleicht nicht ohne Nutzen, an dieser Stelle den Beweis wieder anzuführen, welcher in der elementaren Geometrie dartut, daß die Tangente in einem Punkte eines Kreises senkrecht steht auf dem Radius, der durch diesen Punkt geht. O sei das Zentrum des Kreises und OI die Senkrechte, welche man vom Zentrum O auf die Sekante MM' gefällt hat. Das Dreieck MOM' ist gleichschenklig. I ist der Mittelpunkt der Strecke MM' und OI die Halbierungslinie des Winkels MOM'. Dieser Winkel wird Null, wenn M' sich M nähert. Die Halbierungslinie IO bleibt immer in diesem Winkel eingeschlossen und nähert sich der Geraden OM. MM' bleibt immer senkrecht auf OI, MM' nähert sich also der Senkrechten auf OM in M immer mehr. MM' hat also eine äußerste Grenzlage, und diese Grenzlage ist nichts anders als diese Senkrechte. Sie ist Tangente, in M. Will man jedoch strenger verfahren, so merkt man, daß wenn MT die Senkrechte zum Radius OM in M bildet, der Winkel TMI der Komplementwinkel des Winkels IMO ist. Der Winkel IMO ist seinerseits wieder der Komplementwinkel von MOI, da ja die Summe der Winkel O und M des in I rechtwinkligen Dreiecks gleich einem rechten Winkel ist. Die Winkel TMI und MOI sind also gleich

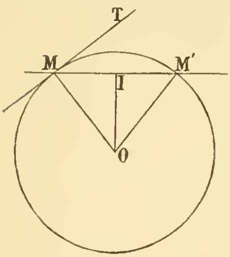


Fig. 124.

groß. Nähert sich der Punkt M' dem Punkte M, so wird der Winkel MOM' allmählich Null. Die Hälfte MOM' oder der Winkel MOI wird also auch Null; folglich auch der Winkel TMI. Behauptet man aber, dieser Winkel könne einen beliebig kleinen Wert annehmen, vorausgesetzt, daß M' nahe genug an M heranrücke, so drückt man dadurch aus, daß MM' als äußerste Grenzlage die Gerade MT hat.

266. Diese Eigenschaft der Tangente erlaubt uns, einige Schlußfolgerungen zu ziehen, welche wir für die Folge brauchen.

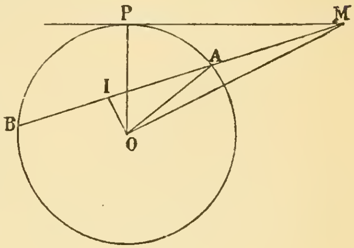


Fig. 125.

Man denke sich einen Kreis mit dem Zentrum O. Außerhalb dieses Kreises wählen wir den Punkt M. Das Produkt $MA \cdot MB$ zweier Segmente, welche von M ausgehen und an den zwei Punkten A und B endigen, wo eine beliebige durch den Punkt M gelegte Sekante den Kreis schneidet, ist gleich $\overline{MP}^2$, d. h. gleich dem Quadrat der Tangente des Kreises, welche man durch M ziehen kann.

Fällt man nämlich vom Zentrum O eine Senkrechte OI auf die Sehne AB, so ist der Punkt I der Mittelpunkt der Länge, und man erhält (Nr. 181, 195):

$$MA \cdot MB = \overline{MI}^2 - \overline{IA}^2.$$

Das Dreieck OIA jedoch, das in I rechtwinklig ist, gibt uns

$$\overline{OA}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{IA}^2.$$

Addieren wir diese zwei Relationen, so ergibt sich daraus

$$MA \cdot MB + \overline{OA}^2 = \overline{MI}^2 + \overline{OI}^2 = \overline{MO}^2.$$

Die letzte Gleichung kommt daher, daß das Dreieck OIM in I rechtwinklig ist. Hiervon kann man ableiten, daß

$$\begin{aligned} MA \cdot MB &= \overline{MO}^2 - \overline{OA}^2 \\ &= \overline{MO}^2 - \overline{OP}^2 = \overline{MP}^2 \end{aligned}$$

ist. Diese letzte Gleichheit kommt wieder daher, daß das Dreieck OPM in P rechtwinklig ist.

Man bemerkt, daß das Produkt $MA \cdot MB$ immer denselben Wert beibehält, wenn die Sekante um den Punkt M dreht. Der Umstand, daß dieser Wert beständig $\overline{MP}^2$ bleibt, kommt daher, daß bei der Drehung der Sekante um M die beiden Punkte A, B sich unaufhörlich dem Punkte P nähern, wenn die Sekante der Tangente MP

näher rückt. Die beiden Längen MA, MB kommen der Länge MP immer näher, und der konstante Wert des Produktes $MA \cdot MB$ kann also kein anderer sein als $\overline{MP}^2$.

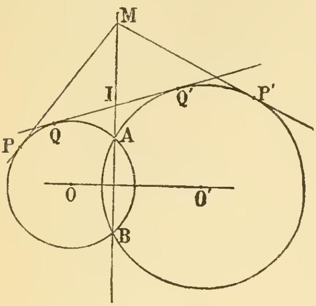


Fig. 126.

Wir denken uns jetzt zwei Kreise mit den Zentren O, O', welche sich in den Punkten A, B schneiden. Die Gerade AB heißt die gemeinsame Sehne der beiden Kreise. Aus der elementaren Geometrie ist bekannt, daß die Punkte A, B symmetrisch zur Mittelpunktslinie OO' liegen. Zieht man durch einen Punkt M dieser gemeinsamen Sehne die beiden Tangenten MP, MP' an die beiden Kreise, so haben diese Tangenten gleiche Länge. Der vorhergehende Satz gibt uns nämlich

$$\overline{MP}^2 = MA \cdot MB = \overline{MP'}^2.$$

Betrachtet man im besonderen eine Gerade QQ', welche zu gleicher Zeit eine Tangente der beiden Kreise ist, so ist es klar, daß die gemeinsame Sehne AB durch die Mitte I der beiden Berührungspunkte Q, Q' gehen muß, da die beiden Tangenten IQ, IQ', welche man durch den Punkt I an beide Kreise legen kann, gleich sein müssen.

267. Diese letzte Eigenschaft führt leicht zur Konstruktion der Tangente einer *Parabel.*

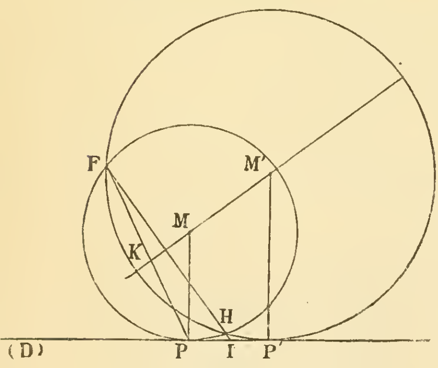


Fig. 127.

Die Parabel kann angesehen werden als der Ort des Zentrums M eines veränderlichen Kreises, der durch den Brennpunkt F geht und dabei die Leitlinie (D) berührt (Fig. 127). Denn es ist augenscheinlich, daß die Entfernungen dieses Mittelpunktes M zum Brennpunkt und zur Leitlinie gleich sind.

Dieses vorausgeschickt betrachten wir zwei benachbarte Punkte M, M' einer Parabel und die Kreise mit den Mittelpunkten M, M', welche durch den Punkt F gehen und in den Punkten P, P' die Leitlinie berühren. P, P' sind die Endpunkte der Senkrechten, welche man von M, M' auf die Leitlinie fällt. Diese Kreise schneiden sich in F. H ist ein zweiter Schnittpunkt; FH ihre gemeinsame Sehne. I sei der Punkt, wo diese Sehne die Leitlinie schneidet. Nach dem Vorausgeschickten ist I die Mitte von PP'. Nähert M' sich dem Punkte M auf der Parabel, so rückt auch P' dem Punkte P immer näher. Die gemeinsame Sehne nähert sich der Geraden FP. Die Gerade MM', welche immer senkrecht auf FI steht, nähert sich unaufhörlich der Senkrechten, die man von M auf FP fällen kann. Diese Senkrechte, welche augenscheinlich durch die Mitte K der Sehne FP gehen muß, bildet die Tangente zur Parabel im Punkte M.

Die Figur zeigt uns, wie man einen beliebigen Punkt der Parabel mit Hilfe des Brennpunktes F und der Leitlinie (D) bestimmen und zugleich die Tangente in diesem Punkt konstruieren kann. Wir nehmen einen beliebigen Punkt P der Leitlinie und verbinden ihn mit dem Brennpunkt F. In der Mitte K dieser Geraden FP errichten wir eine Senkrechte. Diese Gerade schneidet das Lot, welches man in P auf die Leitlinie errichtet, in einem Punkte M der Parabel und bildet in diesem Punkte die Tangente zur Parabel.

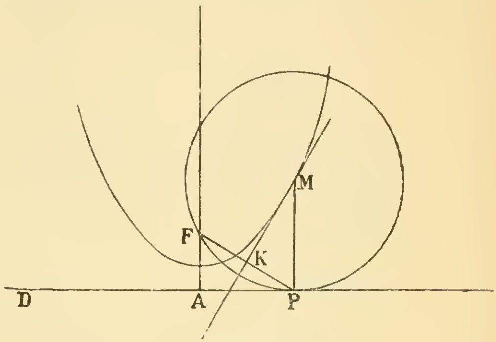


Fig. 128.

Hieraus lassen sich leicht eine große Anzahl Eigenschaften der Parabel ableiten, bei denen ich nicht länger verweilen will.*) Mein Zweck war nur, zu zeigen, wie die geometrische Beweisführung hinführt zur Bestimmung der Tangente einer geometrisch definierten Kurve. Diese Methode führt oft zu einfacheren und natürlicheren Konstruktionen als die analytische, von der wir jetzt reden werden. Diese Methode hat aber den Nachteil, daß man für jede Kurve andere Überlegungen anstellen muß. Die analytische Methode aber, wie wir sehen werden, ist ganz allgemein.

§ 2. Analytisch bestimmte Tangenten.

268. Wir zeichnen zwei rechtwinklige Koordinatenachsen und betrachten einen Kreis, der als Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

hat.

*) Man könnte z. B. leicht nachweisen, wie die Zissoïde mit der Parabel zusammenhängt. Der geometrische Ort der Senkrechten nämlich, welche man vom Scheitelpunkt der Parabel auf die Tangenten fällen kann, ist eine Zissoïde, und diese Eigenschaft führt zu einer einfachen Konstruktion der Tangente der Zissoïde.

Es seien M_0, M_1 zwei Punkte dieses Kreises, x_0, y_0 sind die Koordinaten von M_0, x_1, y_1 die Koordinaten von M_1. In Nr. 242 haben wir gefunden, daß in diesem Falle der Richtungskoeffizient der Geraden $M_0 M_1$ gleich $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ ist. Um die Tangente in M_0 zu finden, muß man in dem Ausdruck dieses Richtungskoeffizienten x_0, y_0 als unveränderlich ansehen und nachsuchen, welchem Grenzwerte dieser Ausdruck sich nähert, wenn M_1 sich dem Punkte M_0 nähert, aber beständig auf dem Kreise bleibt, d. h. wenn die Koordinaten x_1, y_1 den Koordinaten x_0, y_0 gleich werden, aber beständig die Gleichung

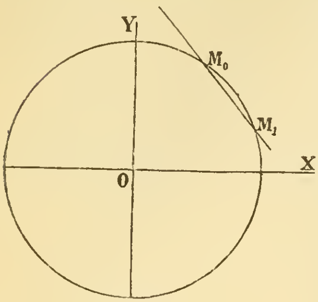


Fig. 129.

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

erfüllen.

Da ferner auch M_0 auf dem Kreis liegt, hat man die andere Gleichung

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2.$$

Hieraus leitet man folgende Formeln ab:

$$x_1^2 + y_1^2 = x_0^2 + y_0^2$$

$$y_1^2 - y_0^2 = -(x_1^2 - x_0^2)$$

$$(y_1 - y_0)(y_1 + y_0) = -(x_1 - x_0)(x_1 + x_0).$$

Dividiert man die beiden Seiten dieser letzten Gleichheit durch $(y_1 + y_0)(x_1 - x_0)$, so erhält man

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -\frac{x_1 + x_0}{y_1 + y_0}.$$

Für den Fall, wo x_1, y_1 und x_0, y_0 einen möglichst geringen Wertunterschied aufweisen, ist die zweite Seite der Gleichheit, und folglich auch die erste, sehr nahe dem Bruche $-\frac{2x_0}{2y_0}$ oder gleich $-\frac{x_0}{y_0}$. Dieses drückt man aus, indem man sagt, der *Grenzwert* des Ausdruckes $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ für den Fall, daß der Punkt x_1, y_1 sich dem Punkte x_0, y_0 immer mehr nähere, aber auf dem Kreise bleibe, sei $-\frac{x_0}{y_0}$.

Der Richtungskoeffizient der Tangente am Kreise für den Punkt x_0, y_0 ist $-\frac{x_0}{y_0}$.

Der Richtungskoeffizient der Geraden OM, welche den Nullpunkt O mit dem Punkte M verbindet, ist $\frac{y_0}{x_0}$ (Nr. 238). Das Produkt dieser beiden Koeffizienten ist -1, woraus man gemäß Nr. 239 schließt, daß die Tangente eines Kreises senkrecht auf dem Radius steht.

269. Wir gehen jetzt zur Parabel über. Als Achsen nehmen wir die Tangente am Scheitelpunkt und die Symmetrieachse. Die Parabel hat dann die Gleichung (Nr. 263)

$$x^2 = 2py.$$

Es seien x_0, y_0 und x_1, y_1 die Koordinaten zweier Punkte M_0, M_1 dieser Parabel. Der Richtungskoeffizient der Geraden, welche diese Punkte verbindet, ist wieder

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Es handelt sich darum, die Zahl zu finden, welche sich dieser Richtungskoeffizient nähert, wenn der Punkt M_1 auf der Parabel dem Punkte M_0 immer näher rückt. Da die beiden Punkte M_0, M_1 auf dieser Kurve liegen, erhält man

$$y_1 = \frac{x_1^2}{2p}, \quad y_0 = \frac{x_0^2}{2p},$$

$$y_1 - y_0 = \frac{x_1{}^2 - x_0{}^2}{2p} = \frac{(x_1 - x_0)(x_1 + x_0)}{2p},$$

und daraus leitet man ab, daß,

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{x_1 + x_0}{2p}.$$

Nähert der Punkt M_1 sich unaufhörlich dem Punkte M_0, d. h. kommt der Wert x_1 dem Werte x_0 unaufhörlich näher, so nähert sich die zweite Seite der Gleichheit dem Werte $\frac{2x_0}{2p} = \frac{x_0}{p}$. Dieser Ausdruck ist der Richtungskoeffizient der Tangente in dem Punkte, dessen Abszisse x_0 ist. Ferner ist $\frac{x_0}{p}$ infolge der Gleichung $x_0{}^2 = 2py_0$ gleich $\frac{2y_0}{x_0}$. Diese letzte Formel führt uns zu einer leicht anwendbaren Konstruktion der Tangente. $\frac{y_0}{x_0}$ ist nämlich der Richtungskoeffizient der Geraden, die den Punkt O mit dem Punkte M_0 verbindet; bezeichnet man durch R den Punkt, welcher x_0 zur Abszisse und $2y_0$ zur Ordinate hat, so sieht man, daß $\frac{2y_0}{x_0}$ der Richtungskoeffizient der Geraden OR ist. Die Tangente im Punkte M_0 muß dieser Geraden folglich parallel sein. Hieraus ersieht man auch leicht, daß, wenn T

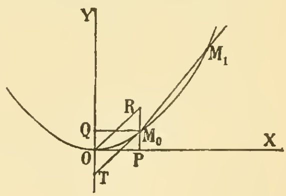


Fig. 130.

den Schnittpunkt der Tangente in M_0 mit der y-Achse darstellt und Q der Fußpunkt des von M auf diese Achse gefällten Lotes ist, der Punkt O die Mitte der Länge QT darstellt. Diese Folgerung hätte man auch leicht von der in Nr. 267 besprochenen geometrischen Konstruktion ableiten können.

270. Betrachten wir jetzt die Kurve $y = x^3$, welche wir in Nr. 252 gefunden haben.

Bezeichnet man durch x_0, x_1 die Abszissen zweier benachbarter Punkte M_0 und M_1, so haben diese Punkte als Ordinate x_0^3 und x_1^3. Der Richtungskoeffizient der Geraden, welche diese beiden Punkte verbindet, ist

$$\frac{x_1^3 - x_0^3}{x_1 - x_0} = x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2;$$

diese Gleichheit läßt sich aus der Formel

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

ableiten, welche wir in Nr. 182 aufgestellt haben. Nähert sich x_1 dem Werte x_0, so nähern x_1^2 und $x_0 x_1$ sich unaufhörlich dem Werte x_0^2, so daß die zweite Seite allmählich $3x_0^2$ wird; dies ist der Richtungskoeffizient der Tangente in dem Punkte mit der Abszisse x_0. Der Wert dieser Konstanten läßt sich auch noch durch $3\frac{y_0}{x_0}$ ausdrücken, wo y_0 die Ordinate des Punktes M_0 darstellt. Hieraus folgt, daß die Tangente des Punktes M_0 parallel zur Geraden OR ist. R stellt einen Punkt dar, dessen Abszisse x_0 ist und dessen Ordinate gleich dem Dreifachen der Ordinate des Punktes M_0 ist.

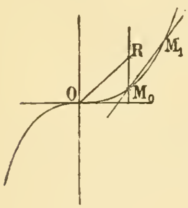


Fig. 131.

271. Betrachten wir noch die gleichseitige Hyperbel. Ihre Gleichung ist nach Nr. 253

$$y = \frac{1}{x}.$$

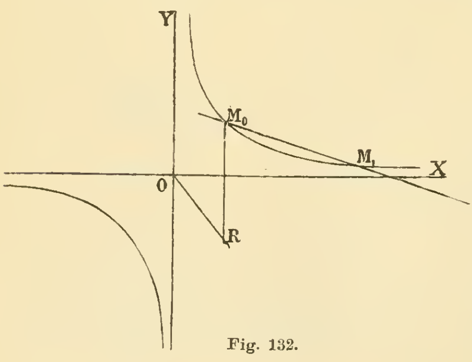


Fig. 132.

Wenn x_0 und x_1 immer noch die Abszissen zweier benachbarter Punkte M_0 und M_1 darstellen und diese Punkte die Werte $\frac{1}{x_0}$ und $\frac{1}{x_1}$ als Ordinate haben, so ist der Richtungskoeffizient der Geraden M_0M_1:

$$\frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}}{x_1 - x_0}.$$

Der Zähler dieses Bruches ist nun aber gleich

$$\frac{x_0}{x_1 x_0} - \frac{x_1}{x_1 x_0} = \frac{x_0 - x_1}{x_1 x_0}.$$

Dividieren wir ihn durch $x_1 - x_0 = -(x_0 - x_1)$, so finden wir $-\frac{1}{x_0 x_1}$. Nähert x_1 sich dem Werte x_0, so nähert $x_1 x_0$ sich dem Werte x_0^2. Der Richtungskoeffizient der Tangente im Punkte, der x_0 zur Abszisse hat, ist also $-\frac{1}{x_0^2}$ oder noch $-\frac{y_0}{x_0}$. y_0 bezeichnet die Ordinate des Punktes M_0. Hieraus folgt, daß die Tangente der gleichseitigen Hyperbel im Punkte M_0 parallel ist zur Geraden OR, welche den Nullpunkt mit dem Punkte R verbindet. R hat als Koordinaten x_0 und $-y_0$, liegt also in bezug auf die x-Achse symmetrisch zum Punkte M_0.

272. Diese Beispiele liefern uns die Methode, um die Tangente einer Kurve zu finden, deren Gleichung man kennt. Erinnern wir zuerst daran, daß diese Gleichung uns das Mittel an die Hand gibt, die Ordinate y eines Punktes der Kurve auszurechnen, wenn man seine Abszisse kennt. Betrachtet man zwei nahe beieinander gelegene Punkte der Kurve mit den Abszissen x_0 und x_1, so kann man ihre Ordinaten y_0 und y_1 leicht berechnen. Man bildet alsdann den Bruch $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Dieser Bruch stellt den Richtungskoeffizienten der Geraden (D) dar, welche die beiden Punkte verbindet. Sagt man nun, der Punkt x_0, y_0 lasse eine Tangente (T) zu, so heißt das, der Richtungskoeffizient der Geraden (D) und diejenige der Geraden (T) können beliebig wenig voneinander verschieden sein, vorausgesetzt, daß der Punkt M_1 mit den Koordinaten x_1, y_1 auf der Kurve möglichst nahe beim Punkte M_0 liegt. Dasselbe will man ausdrücken, wenn man sagt, der Richtungskoeffizient der Geraden (D) habe zum Grenzwert den Richtungskoeffizienten der Geraden (T), und zwar für den Fall, wo x_1 und y_1 sich unaufhörlich den Werten x_0, y_0 nähern. Man sucht also den Grenzwert des Bruches $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ für den Fall, wo x_1, y_1 sich unaufhörlich den Werten x_0, y_0 nähern. Selbstverständlich muß der Punkt mit den Koordinaten x_1, y_1 bei dieser Annäherung stets auf der Kurve bleiben. Drückt man diese Bedingung nicht aus, so kann man den Bruch $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ nicht untersuchen, da man nicht viel aussagen kann

über einen Bruch, von dem man nur weiß, daß seine beiden Glieder sehr klein sind (Nr. 188).

In den vorhergehenden Beispielen hat man sich solcher Ausdrücke bedient, die man aus der Gleichung der Kurve selbst herleiten kann und welche y_1 und y_0 mittels x_1 und x_0 ausdrücken. Ferner erlaubten einige bekannte Identitäten, $x_1 - x_0$ als Faktor in dem Ausdruck $y_1 - y_0$ herauszuheben. Hierdurch erzielten wir eine Vereinfachung des Bruches $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, welche uns den Grenzwert dieses Bruches zu finden gestattete für den Fall, wo x_1 gleich x_0 wird. Dieses Verfahren ist sehr allgemein.

§ 3. Ableitungen.

273. Sagt man, y sei eine Funktion von x, so drückt man damit aus, daß jedem Werte von x (wenigstens innerhalb gewisser Grenzen) ein Wert von y entspricht, und daß man den Wert von y aus dem Werte von x zu berechnen vermag. Diese Berechnung kann, wie in den vorhergehenden Beispielen, aus dem Ausdruck der Funktion selbst herausgefunden werden. Sie kann darin bestehen, eine Messung auszuführen, und für diesen Fall nehmen wir an, daß jede Messung mit der vollkommensten Genauigkeit vorgenommen werden kann. Ferner kann sie darin bestehen, in einer Tabelle den Wert von y aufzusuchen, der dem Werte von x entspricht. Von diesem Standpunkt aus kann eine gegebene feste Zahl als Funktion von x angesehen werden. Es genügt, diese Zahl allen Werten von x entsprechen zu lassen. Die Funktion ist in diesem Falle *konstant.*

Um eine *Funktion* von x zu bezeichnen, ist es bequem, ein Symbol anzuwenden, und zwar das Symbol $f(x)$. Betrachtet man x als eine gegebene Zahl, so stellt das Symbol $f(x)$ den entsprechenden Wert der Funktion dar. Ersetzt man also hiernach x durch eine Zahl 1, 2, 3, ... in dieser symbolischen Darstellung, so bezeichnen die Ausdrücke $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ die entsprechenden Werte der Funktion.

Schreibt man

$$y = f(x),$$

so drückt man damit ganz einfach aus, daß y eine Funktion von x ist, daß also jedem Werte von x ein Wert von y entspricht, und daß man diesen Wert findet, wenn man mit der Zahl x alle die Operationen vornimmt, welche das Funktionszeichen f vor dem in Klammer stehenden Buchstaben x andeutet. Ferner beschränkt man sich nicht auf den Buchstaben f allein, man kann auch andere anwenden und z. B. schreiben

$$F(x),\ \varphi(x),\ \Phi(x),\ \psi(x),\ g(x), \ldots$$

Der Gebrauch verschiedener Symbole kann sogar in gewissen Fällen ganz bequem sein, besonders wenn man verschiedene *Funktionen* zu besprechen hat.

274. Der auf diese Art und Weise entstandene Begriff der Funktion ist sehr allgemein. Diese Allgemeinheit wollen wir ein wenig einschränken, indem wir annehmen, es handle sich nur um *stetige* Funktionen. Wir sagen, $f(x)$ sei eine stetige Funktion von x, wenn der Wert dieser Funktion sehr wenig, ja sogar beliebig wenig ändert, wenn die Änderungen von x genügend klein sind. Es gibt jedoch *einige* Ausnahmen, und wir wollen uns hier nicht verpflichten, später gewisse Funktionen nicht zu betrachten, weil dieselben für bestimmte Werte von x dieser Bedingung nicht genügen. Dies ist z. B. der Fall für die Funktion $\frac{1}{x}$, welche für $x = 0$ nicht mehr stetig ist (Nr. 253).

Betrachtet man jedoch zwei beliebige Zahlen a_0, a_1, von denen keine Null ist, und welche auch die Zahl 0 nicht einschließen, so kann man sagen, die Funktion $\frac{1}{x}$ sei stetig für alle Werte von x, welche im Intervall (a_0, a_1) liegen.*)

Betrachtet man zwei Werte x_0, x_1, welche man der Veränderlichen x beilegen kann, so bezeichnet man oft mit

$$x_1 - x_0,\ f(x_1) - f(x_0)$$

den (positiven oder negativen) *Zuwachs* der Veränderlichen x und der Funktion $f(x)$, wenn die Veränderliche x vom Werte x_0 zum Werte x_1 übergeht.

Dies vorausgeschickt, sagen wir ganz allgemein, die Funktion $f(x)$ sei stetig im Intervall (a_0, a_1), um auszudrücken, daß ihr Zuwachs beliebig klein ist an absolutem Wert, sobald der Zuwachs von x genügend klein ist, jedoch nur für den Fall, wo die Werte der Veränderlichen dem Intervall (a_0, a_1) angehören.

Weiter oben sind wir übereingekommen und haben sehr oft erörtert, daß man den Wert einer Funktion, die im Intervall (a_0, a_1) stetig ist, für jeden Wert von x dieses Intervalles durch einen Punkt darstellen kann. Nach diesem Übereinkommen kann man also die Funktion $f(x)$ für das Intervall (a_0, a_1) durch eine Kurve darstellen, welche den Punkt A_0 [mit der Abszisse $\overline{OB_0} = a_0$ und der Ordinate

*) d. h. welche gleich a_0 oder a_1 sind, oder gleich einer Zahl, welche zwischen den Werten a_0, a_1 liegt.

$\overline{B_0 A_0} = \overline{O C_0} = f(a_0)$] mit dem Punkte A_1 [der als Koordinaten $OB_1 = a_1$ und $\overline{B_1 A_1} = \overline{O C_1} = f(a_1)$ hat] verbindet.

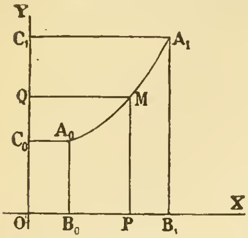


Fig. 133.

Geht die Veränderliche vom Werte a_0 zum Werte a_1 über, so beträgt ihr Zuwachs

$$\overline{B_0 B_1} = a_1 - a_0,$$

und der entsprechende Zuwachs der Funktion ist

$$\overline{C_0 C_1} = f(a_1) - f(a_0).$$

Die Kurve, welche den Punkt A_0 mit dem Punkt A_1 verbindet, ist nichts anderes als der Ort der Punkte, deren Koordinaten x, y die Gleichung $y = f(x)$ erfüllen, und deren Abszissen dem Intervall (a_0, a_1) angehören.

275. Wir wollen jetzt unseren Standpunkt ändern. Die Achsen OX, OY behalten wir bei, nehmen aber an, x stelle die Zeit dar. Wenn man will, ist die x-Achse eine Art Linear-Uhr, wo der Zeiger sich gleichmäßig in positiver Richtung bewegt. Zur Zeit 0 geht er durch den Punkt O hindurch, und in der Zeiteinheit durchläuft er die Längeneinheit. Die Gleichung $y = f(x)$ kann alsdann angesehen werden als die Bewegungsgleichung eines Punktes Q auf der y-Achse. Man versteht darunter: die Ordinate y des Punktes Q sei für jeden Augenblick x gerade gleich $f(x)$. (So kann die Gleichung $y = ax + b$ als die Gleichung einer gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit a auf der y-Achse angesehen werden. b ist die Ordinate des beweglichen Punktes zur Zeit 0.) Ist die Kurve, welche die Funktion $f(x)$ im Intervall (a_0, a_1) darstellt, gezeichnet*), so kann man für jeden Augenblick x die Stellung des beweglichen Punktes Q auf der y-Achse finden. Es genügt, auf der x-Achse den Punkt P mit der Abszisse x zu bestimmen, dann den Punkt M zu suchen, wo die durch P gelegte Parallele zur y-Achse die Kurve schneidet. Der Punkt Q, in dem die durch M gelegte Parallele zur x-Achse die y-Achse schneidet, gibt uns die Lage des beweglichen Punktes für den Augenblick x. Von diesem Standpunkt aus betrachtet, ist diese Kurve nichts anderes als das *Diagramm* der Bewegung im Zeitraum (a_0, a_1). Während dieses Zeitintervalls bewegt sich der Punkt Q von dem Punkte C_0 nach dem Punkte C_1.

Es ist selbstverständlich, daß unser beweglicher Körper durch alle Punkte hindurchgeht, welche zwischen C_0 und C_1 liegen. Ferner kann er noch tiefer fallen als C_0 und höher steigen als C_1. Betrachtet

*) d. h. für alle Werte von x, welche in diesem Intervall liegen.

man die Figur vom rein geometrischen Standpunkte aus, so sieht man leicht, daß die Kurve zwischen den Punkten A_0 und A_1 notwendigerweise alle Parallelen zur x-Achse schneiden muß, welche zwischen den beiden gleichlaufenden Geraden C_0A_0 und C_1A_1 liegen. Dies trifft sogar noch zu für den Fall, wo sich die Kurve über C_1A_1 und C_0A_0 hinaus erstreckt.

Wenn also $f(x)$ eine stetige Funktion im Intervall (a_0, a_1) darstellt, und wenn man einen beliebigen Wert K angibt, der zwischen den Werten $\overline{OC_0} = f(a_0)$ und $\overline{OC_1} = f(a_1)$ liegt, so kann man sagen, zwischen a_1 und a_0 liege auch ein bestimmter Wert α der Veränderlichen, für welchen $f(\alpha) = K$ ist. Später wird es von großem Nutzen sein, wenn wir schon hier hervorheben, daß es nur einen einzigen Wert von x gibt, für den diese Gleichung stattfindet. Dies trifft jedoch nur zu für den Fall, wo Q sich von C_0 nach C_1 bewegt, ohne zu oszillieren, in anderen Worten, wenn die Funktion $f(x)$ entweder beständig zu- oder beständig abnimmt, während x immer in derselben Richtung zwischen a_0 und a_1 variiert.

Für den Spezialfall, wo die Zahlen $f(a_0)$ und $f(a_1)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, wo der Punkt A_0 diesseits und der Punkt A_1 jenseits der x-Achse liegen, wo ferner der Punkt O zwischen den Punkten C_0 und C_1 sich befindet, kann man behaupten, daß es zwischen a_0 und a_1 wenigstens einen Wert von x gibt, für welchen $f(x) = 0$ wird. Es ist dies die Abszisse desjenigen Punktes, wo die Kurve die x-Achse schneidet, und zwar in dem Augenblick, wo der Körper durch O hindurchgeht.

276. Diese geometrischen oder kinematischen Darstellungen der stetigen Funktion $f(x)$ haben nur Wert, wenn die Kurve oder die Bewegung ziemlich einfacher Natur sind, wenn man sich dieselben leicht vorstellen kann. Wir machen ferner die wichtige Annahme, die Kurve habe in jedem Punkte eine *Tangente* und der bewegliche Körper in jedem Augenblick eine *Geschwindigkeit*; wir gehen sogar weiter und nehmen an, diese Tangente ändere ihre Stellung sehr wenig für zwei ganz nahe aneinander gelegene Punkte der Kurve, oder diese Geschwindigkeit erleide eine geringe Veränderung zwischen nahe aufeinanderfolgenden Augenblicken. Diese Bedingungen, welche wir erörtern wollen, werden in dem einzigen Worte *regulär* zusammengefaßt. Dieses Wort haben wir schon oft gebraucht, wenn wir von einer Kurve sprachen, man kann sich desselben aber auch bedienen, um eine Bewegung zu qualifizieren; diese Bedingungen also erklären das unklare Attribut regulär.

Um die Tangente einer Kurve für den Punkt M_0 zu finden, der x_0 zur Abszisse und $f(x_0)$ zur Ordinate hat, wendet man das Verfahren aus Nr. 272 an. Dieses Verfahren besteht darin, den Grenzwert zu suchen, dem sich der Richtungskoeffizient

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

der Geraden $M_0 M_1$ (welche den Punkt M_0, dessen Abszisse x_0, mit dem Punkte M_1, dessen Abszisse x_1 ist, verbindet) unaufhörlich nähert, für den Fall, wo x_1 sich dem Werte x_0 nähert. Dieser Grenzwert ist nichts anderes als der Wert der *Ableitung* der Funktion $f(x)$ für $x = x_0$.

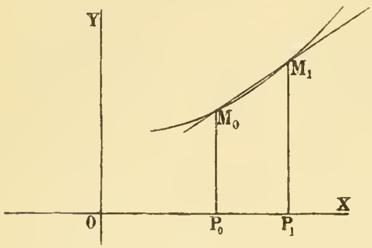


Fig. 134.

Dieser Wert stellt den Richtungskoeffizienten der Tangente der Kurve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, für den Punkt mit der Abszisse x_0 dar. Zugleich zeigt er aber auch die Richtung der Kurve selbst in dem genannten Punkte an.

Diesen Wert, der natürlich von x_0 abhängt, stellt man gewöhnlich durch $f'(x_0)$ dar.

Man kann sich jedoch noch folgendermaßen ausdrücken.

Sagt man, die stetige Funktion $f(x)$ habe für $x = x_0$ eine Ableitung, so heißt das, es gebe eine bestimmte Zahl $f'(x_0)$, die so beschaffen ist, daß die Diffierenz

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - f'(x_0)$$

an absolutem Wert beliebig klein sein kann, sobald der absolute Wert der Differenz $x_1 - x_0$ beliebig klein ist. Die Ableitung ist der *Grenzwert* des Verhältnisses des Zuwachses der Funktion zum Zuwachs der Veränderlichen, wenn sich der Zuwachs der letzteren dem Werte Null nähert.

277. Betrachten wir jetzt einen beweglichen Punkt, dessen Bewegung auf der y-Achse durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellt wird; in dieser Gleichung stellt x die Zeit dar.

In Nr. 214 fanden wir, daß die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers, der sich gleichmäßig auf der Abszissenachse bewegt, und der in den Augenblicken t, t' sich in den Punkten x und x' befindet, durch $\frac{x' - x}{t' - t}$ gegeben wird. Jetzt handelt es sich um einen Körper, der sich auf der Ordinatenachse bewegt, und hier stellt nicht mehr der Buchstabe t, sondern der Buchstabe x die Zeit dar. Man muß also sagen: Die Geschwindigkeit eines Punktes, welcher sich gleichmäßig auf der y-Achse bewegt und dessen Ordinaten y_0 und y_1 sind in den Augenblicken x_0 und x_1, ist $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

Bewegt ein Körper sich auf einer Geraden, auf der y-Achse z. B., so nennt man mittlere Geschwindigkeit dieses Körpers während des Zeitraumes (x_0, x_1) die Geschwindigkeit eines gedachten Körpers, welcher sich gleichmäßig auf derselben Achse bewegt und in den Zeitpunkten x_0, x_1 mit dem richtigen Körper zusammentrifft (Nr. 215).

Die mittlere Geschwindigkeit eines Körpers, welche auf der y-Achse eine Bewegung vollführt, welche $y = f(x)$ zur Gleichung hat, ist also für das Zeitintervall (x_0, x_1)

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0};$$

der Grenzwert, welchem sich diese mittlere Geschwindigkeit nähert, wenn x_1 sich dem Werte x_0 nähert, ist, gemäß der Definition, die Geschwindigkeit des Körpers im Zeitpunkt x_0. Dies ist der Wert $f'(x_0)$ der Ableitung der Funktion $f(x)$ für $x = x_0$.

Betrachtet man die Kurve als das Diagramm der Bewegung, so findet man, daß in jedem Augenblick x_0 die Geschwindigkeit des bewegten Körpers auf der y-Achse dem Richtungskoeffizienten der Tangente des Diagramms im Punkt M_0 mit der Abszisse x_0 gleich ist.

278. Fügen wir noch einige Worte in bezug auf die gebräuchlichen Schreibweisen hinzu.

Jedem Werte von x entspricht ein Wert der Ableitung von $f(x)$. Mit anderen Worten: die Ableitung ist eine *Funktion* von x. Diese Funktion stellt man durch $f'(x)$ dar, oder auch durch y', wenn man die Funktion $f(x)$ mit y bezeichnet. Die Schreibweisen

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{dy}{dx},$$

die wir Leibniz verdanken, werden ebenfalls häufig angewandt. Der Buchstabe d, welchen man vor die Buchstaben f und x stellt, ist der Anfangsbuchstabe des Wortes *Differenz.* Die Bezeichnungsweise $\frac{df}{dx}$ erinnert also an die *Herkunft* der Ableitung, nämlich an das Verhältnis der *Differenz* $f(x_1) - f(x_0)$ der Werte der Funktion zu der *Differenz* $x_1 - x_0$ der Werte der Variabeln, oder, wie man oben gesagt, das Verhältnis des *Zuwachses* der Funktion zum *Zuwachs* der Veränderlichen.

Nimmt man den Buchstaben h, um den Zuwachs $x_1 - x_0$ der Variabeln, und k, um den Zuwachs $y_1 - y_0$ oder $f(x_1) - f(x_0)$ der Funktion zu bezeichnen, so erhält man

$$x_1 = x_0 + h, \quad y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + k.$$

Die Ableitung der Funktion $f(x)$, für $x = x_0$ ist der Grenzwert, welchem sich das Verhältnis

$$\frac{k}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

nähert, wenn h oder $x_1 - x_0$ sich dem Werte 0, oder wenn x_1 sich dem Werte x_0 nähert. Man darf nicht vergessen, daß bei der Berechnung dieses Grenzwertes x_0 als konstant betrachtet werden muß.

Welches sind nun die Schlüsse, die wir aus dieser Annahme ziehen können? Für diejenigen Werte von x, welche in dem Intervall (a_0, a_1) liegen, hat die stetige Funktion $f(x)$ eine Ableitung $f'(x)$, und diese Ableitung $f'(x)$ selbst ist wiederum eine stetige Funktion. Je nach dem Standpunkt, welchen man vertritt, kann man sagen, die Kurve $A_0 A_1$ lasse in jedem ihrem Punkte eine Tangente zu, und diese Tangente ändere ihre Richtung sehr wenig für zwei nahe aneinander gelegene Punkte; oder anders ausgedrückt, der Körper Q, welcher sich auf der y-Achse bewege, habe in jedem Augenblick eine gewisse Geschwindigkeit, und diese Geschwindigkeit ändere sehr wenig in einem kleinen Zeitraum. Es ist zwar wahr, daß man sich nicht leicht eine Kurve oder eine Bewegung denken kann, wo diese Bedingungen nicht erfüllt sind, ich muß den Leser jedoch aufmerksam machen, daß dieselben logisch nicht in der Definition der Stetigkeit selbst enthalten sind.

279. Nehmen wir an, man könne für jeden Wert von x die Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x)$ ausrechnen. Das *Vorzeichen* dieser Ableitung belehrt uns über die Art der Änderung dieser Funktion, ob sie mit wachsendem x wächst oder abnimmt.

In den nachfolgenden Erörterungen nehmen wir $a_0 < a_1$ an. Ist die Ableitung $f'(x)$ für alle Werte von x, welche zwischen diesen beiden Zahlen liegen, immer positiv, so ist die Geschwindigkeit des Punktes Q, dessen Bewegung auf der Ordinatenachse durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellt wird, immer positiv. Der bewegte Körper steigt höher mit wachsendem x; seine Ordinate $f(x)$ nimmt zu (im algebraischen Sinn). Ist in demselben Zeitintervall dagegen die Ableitung negativ, so ist auch die Geschwindigkeit unseres Körpers negativ, er fällt, und seine Ordinate nimmt mit wachsendem x ab. Ist in demselben Zeitraum die Geschwindigkeit im allgemeinen positiv, wird sie hie und da Null, ohne jedoch negativ zu werden, so steigt unser bewegter Körper immer höher, nur wird die Bewegung sich hie und da verlangsamen; die Ordinate $f(x)$ wird immer größer, je mehr x zunimmt. Ist desgleichen die Geschwindigkeit oder die Ableitung $f'(x)$ im allgemeinen negativ, wenn x zwischen a_0 und a_1 ändert, wird sie sogar einige Male Null, ohne jedoch positiv zu werden, so nimmt die Ordinate mit wachsendem x ab.

Es kann jedoch vorkommen, daß die Ableitung Null wird für einen Wert α von x, welcher zwischen a_0 und a_1 liegt. Sie kann ihr *Vorzeichen ändern*, indem sie z. B. positiv ist für Werte von x, welche kleiner als α sind (für Zeitpunkte, welche α vorhergehen) und negativ für Werte, welche α übertreffen. Der bewegte Körper steigt alsdann, [$f(x)$ nimmt zu], solange x den Wert α noch nicht erreicht hat, dann wird die Bewegung langsamer, wenn wir die Geschwindigkeit als stetig ansehen; im Punkte α scheint er still zu stehen, und gleich darnach fällt er zurück. $f(x)$ nimmt ab, wenn x über den Wert α hinausgeht, und die Ordinate $f(\alpha)$ ist ein wenig größer als die Ordinate $f(x)$ für Werte von x, welche sich wenig von α unterscheiden, sei es daß sie kleiner oder größer als α sind. Für $x = \alpha$ geht die Funktion $f(\alpha)$ durch ein *Maximum*, dessen Wert $f(\alpha)$ ist.

Ist die Ableitung dagegen Null für $x = \alpha$, negativ für Werte von x, welche kleiner sind als α und positiv für größere, so nimmt die Funktion $f(x)$ ab für Werte $x < \alpha$, geht für $x = \alpha$ durch ein Minimum, dessen Wert $f(\alpha)$ ist, und beginnt alsdann wieder zu steigen.

Endlich (ohne jedoch länger dabei zu verweilen) muß ich den Leser darauf aufmerksam machen, daß die Funktion $f(x)$ auch dann noch ein Maximum oder Minimum für $x = \alpha$ aufweisen kann, wenn diese Funktion für diesen Spezialwert der Variablen keine Ableitung besitzt (oder die Ableitung unstetig ist für $x = \alpha$) und ihr Vorzeichen ändert, wenn x durch den Wert α hindurchgeht.

280. Dieselben Schlußfolgerungen, welche man aus dem Diagramm einer Bewegung ziehen kann, lassen sich leicht von der Kurve ablesen, welche die Gleichung $y = f(x)$ darstellt.

In Fig. 135 hat man einen Kurvenbogen gezeichnet, dessen Tangente in allen Punkten einen positiven Richtungskoeffizienten hat. Mit anderen Worten, die Parallele, welche man zu einer beliebigen dieser Tangenten durch O legt, befindet sich in dem Winkel der positiven Koordinatenachsen. Eine dieser Tangenten hat man in M gezeichnet. Der Leser mag sich nun einen Körper denken, welcher sich auf der

Kurve bewegt, und zwar so, daß seine Abszisse zunimmt. Er kann sich alsdann überzeugen, daß die Ordinate ebenfalls zunimmt. Geht

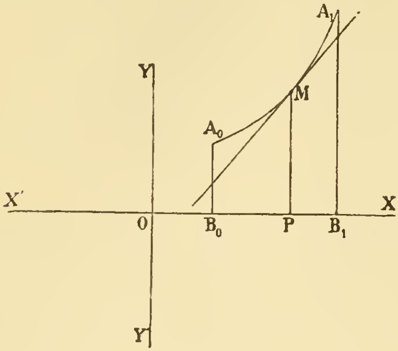


Fig. 135.

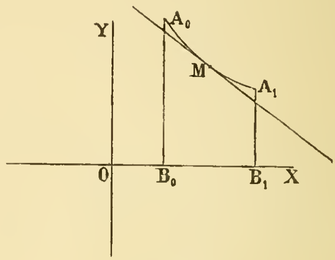


Fig. 136.

der Körper durch Punkt M, so ist seine Bewegung ungefähr dieselbe, als bewege er sich auf der Tangente, da diese ja in M mehr oder weniger mit der Kurve zusammenfällt. Würde der Körper sich nun auf dieser Geraden bewegen, so nähme gemäß Nr. 241 seine Ordinate doch gewiß zu. Dasselbe ist der Fall für die Kurve.

Wäre dagegen, wie in Fig. 136, der Richtungskoeffizient der Tangente immer negativ, so nähmen die Ordinaten mit wachsender Abszisse ab. Die Beweisführung wäre dieselbe.

Im Grunde genommen besteht diese Beweisführung also darin, die Bewegung auf der Kurve mit der Bewegung auf der Tangente zu vergleichen, und der Leser merkt, daß sie eben dadurch nicht von allzugroßer Strenge ist. Denselben Fehler finden wir in der ersten Überlegung wieder, wo wir von der Geschwindigkeit des Körpers auf der y-Achse gesprochen haben. Sagt man dort, es sei klar, daß der bewegte Körper auf dieser Achse steige, wenn die Geschwindigkeit positiv ist, so heißt das ein wenig mit Worten spielen. Handelt es sich um eine gleichmäßige Bewegung, so liegt kein Zweifel vor; für eine beliebige Bewegung aber ist die Sache nicht mehr auf eine rein logische Art und Weise bewiesen, da dort der Sinn des Wortes Geschwindigkeit geändert hat. Die vorhergehendeu Figuren genügen jedoch meiner Meinung nach, um den Leser von der Wahrheit dieser Sätze zu überzeugen. Übrigens gehören diese Sätze der Analysis an, und dort hat man einwandsfreie Beweise für ihre Richtigkeit.

Hier nun zwei geometrische Figuren für den Fall, wo die Ableitung Null wird und ihr Vorzeichen ändert. Nehmen wir einen Punkt der Kurve, für dessen Abszisse die Ableitung der Funktion (welche die Kurve darstellt) Null wird. Der Richtungskoeffizient der Tangente zur Kurve ist also an diesem Punkte 0, und folglich ist die Tangente parallel zur Abszissenachse. Durchkreuzt die Tangente die Kurve nicht, so entspricht dieser Punkt augenscheinlich einem Maximum oder einem Minimum der Ordinate.

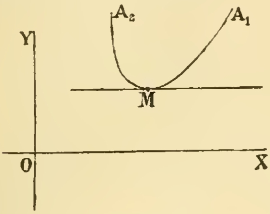


Fig. 137.

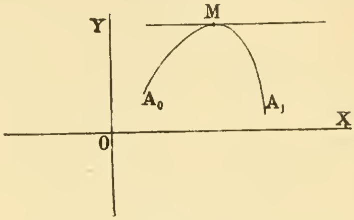


Fig. 138.

In der Figur rechts entspricht der Punkt M einem Maximum. Bewegt sich der Körper derart auf der Kurve, daß seine Abszisse wächst, so ist der Richtungskoeffizient der Tangente auf der Bogenlänge A_0M positiv; die Ordinate wächst also. Sie nimmt dagegen ab auf dem Bogen MA_1, wo der Richtungskoeffizient der Tangente negativ ist. Das Gegenteil trifft bei der linken Figur zu.

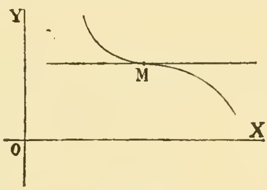


Fig. 139.

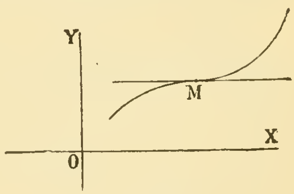


Fig. 140.

In den zwei folgenden Figuren ist die Tangente in M zwar parallel zur Abszissenachse, aber sie schneidet die Kurve. Der Punkt M heißt Wendepunkt (Nr. 249). Für die rechte Figur ist der Richtungskoeffizient der Tangente dies- und jenseits von M positiv, für die linke negativ. Obgleich die Ableitung den Wert Null hat, ändert ihr Vorzeichen doch nicht auf der ganzen in Betracht kommenden Bogenlänge; die Ordinate nimmt also im ersten Falle ab, und im zweiten zu. Dies alles stimmt vollständig mit dem oben Bemerkten überein.

Die Figuren 141 und 142 gehören dem Spezialfall an, auf den wir gegen Ende der vorhergehenden Nummer aufmerksam gemacht haben. Für beide Figuren ist die Tangente der Kurve im Punkte R parallel zur y-Achse. Dieser Punkt entspricht einem Maximum der Kurve in der linken, einem Minimum in der rechten Figur. In der ersten Figur ist der Richtungskoeffizient der Tangente positiv für alle Punkte des Bogens A_0R, ausgenommen für den Punkt R, wo er zu bestehen aufhört, oder richtiger, unendlich wird. Sie ist dagegen negativ für alle Punkte des Bogens RA_1. Man sagt, dieser Richtungskoeffizient oder die Ableitung der Funktion $f(x)$ gehe von $+\infty$ auf

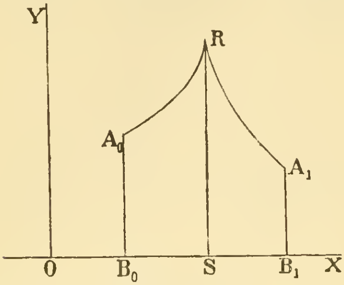


Fig. 141.

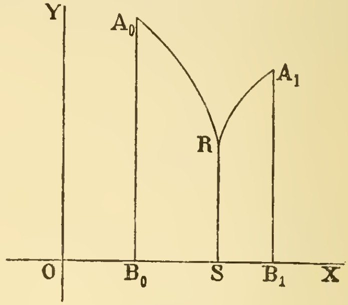


Fig. 142.

$-\infty$ über, wenn die Variable x beim Wachsen den Wert α der Abzsisse des Punktes R erreicht. Die Funktion $f(x)$ wächst, wenn x von der Abszisse x_0 des Punktes A_0 bis α wächst, sie nimmt ab, wenn x von α bis zur Abszisse x_1 des Punktes A_1 wächst. Für $x = \alpha$ hat sie ein Maximum. Die rechte Figur gibt zu ähnlichen Erörterungen Anlaß.

281. In einem Intervall (a_0, a_1) kann es mehrere Werte von x geben, für welche die stetige Funktion $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum hat; die Kurve, welche von A_0 nach A_1 führt, weist alsdann mehrere *Krümmungen* auf, der Körper, der sich von C_0 nach C_1 bewegt, vollzieht einige Schwingungen. Je mehr solcher Krümmungen eine Kurve besitzt, desto unregelmäßiger ist sie. Ich nehme an, und zwar ist dies wichtig, man könne einen solchen Intervall immer in verschiedene kleinere zerlegen, in welchen die Funktion entweder wachse, abnehme oder konstant bleibe. Anderenfalls hat man es nicht mehr mit einer Kurve oder einer Bewegung zu tun, die man sich vorstellen kann, sondern mit einer jener rein logischen Konzeptionen, deren Studium ganz außerhalb der Grenzen dieses Buches liegt.

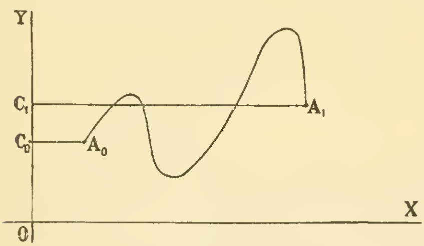


Fig. 143.

282. Ist die Ableitung einer Funktion $f(x)$ Null für alle Werte von x, welche im Intervall (a_0, a_1) liegen, so kann man behaupten, diese Funktion bleibe für alle diese Werte von x konstant.

Zu diesem Zwecke fassen wir die Bewegung des Punktes Q auf der y-Achse ins Auge (Nr. 275). Diese Bewegung entspricht der Formel $y = f(x)$, wo $f(x)$ die Funktion darstellt, deren Ableitung beständig Null ist, für alle Werte von x, welche zwischen a_0 und a_1 liegen. Im Zeitraum (a_0, a_1) hat der bewegte Körper immer eine Geschwindigkeit Null. Er befindet sich also in Ruhe, und seine Ordinate ist konstant.

Geometrisch gedeutet, besagt dieser Satz folgendes: Eine Kurve, deren Tangente immer parallel zur x-Achse ist, muß notwendigerweise selbst eine Parallele zur x-Achse sein.

Diese beiden Auslegungen berechtigen zur Annahme des oben ausgesprochenen Satzes. Übrigens besitzt man einwandsfreie Beweise desselben.

Bemerken wir ferner, daß auch das Gegenteil zutrifft. Betrachtet man y als eine Funktion von x, welche immer denselben Wert hat, welches auch x sei, so ist die Differenz der den Werten x_0, x_1 entsprechenden Werte von y Null. Dasselbe ist der Fall für den Quotienten dieser Differenz und $x_0 - x_1$. Dieser Quotient nähert sich nicht nur dem Werte 0, sondern ist immer gleich 0, wenn x_1 sich x_0 nähert. Die Ableitung einer als Funktion von x angesehenen Konstanten ist Null.

283. Die vorausgehenden Sätze zeigen, von welch großem Nutzen die Kenntnis der Ableitung ist, und beweisen eben dadurch die Nützlichkeit der Regeln, mittels derer man die Ableitung einer Funktion finden kann. Ich beschränke mich jedoch darauf, nur einige dieser Regeln anzuführen.

Betrachten wir die Funktion $ax + b$, wo a und b gegebene Zahlen sind. Wünscht man den Wert der Ableitung für $x = x_0$ zu kennen, so muß man den Grenzwert suchen, welchem sich der Differenzenquotient

$$\frac{ax_1 + b - (ax_0 + b)}{x_1 - x_0} = \frac{ax_1 + b - ax_0 - b}{x_1 - x_0} = \frac{a(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = a,$$

unaufhörlich nähert, wenn x_1 sich x_0 nähert. Dieses Verhältnis nähert sich nicht nur dem Werte a, sondern ist immer gleich a. Die Ableitung der Funktion $ax + b$ ist also die Konstante a. Faßt man die Bewegungen eines Körpers ins Auge, wie wir dies früher getan haben, so sagt man, die Geschwindigkeit bei der gleichmäßigen Bewegung sei konstant. Für den Spezialfall, wo a Null ist, findet man die Anmerkung der vorigen Nummer wieder. Die Ableitung der als Funktion von x betrachteten Konstanten b ist gleich Null. Man sieht ferner, daß für $b = 0$, $a = 1$, die Ableitung der Variabeln x, als Funktion von x betrachtet, gleich 1 ist.

Betrachten wir ferner die Funktion x^n, wo n eine positive, ganze Zahl bedeutet. Wir haben hier den Grenzwert zu suchen, welchem sich der Differenzenquotient

$$\frac{x_1^{\,n} - x_0^{\,n}}{x_1 - x_0}$$

unaufhörlich nähert, wenn x_1 sich x_0 nähert. Nun aber haben wir in Nr. 188 gesehen, daß unter diesen Bedingungen das Verhältnis $\frac{x_1^{\,n} - x_0^{\,n}}{x_1 - x_0}$ dem Werte $nx_0^{\,n-1}$ beliebig nahekommen kann. Die Ableitung der Funktion x^n ist also nx^{n-1}. Im besondern sind die Ableitungen der Funktionen x^2, x^3 gleich $2x$, $3x^2$, wie wir dies in den Nr. 268, 269 festgestellt haben. Für diese Spezialfälle war unser Verfahren übrigens das nämliche wie für den allgemeinen Fall.

284. y und z mögen zwei Funktionen von x sein mit den Ableitungen y' und z'. Sind A und B numerische Konstanten, so will ich in dieser Nummer beweisen, daß die Funktion $Ay + Bz$ als Ableitung $Ay' + Bz'$ hat.

Zu diesem Zwecke möge x_0 derjenige Wert von x sein, für welchen man die Ableitung der Funktion suchen will. y_0 und z_0 sind die dem Werte x_0 entsprechenden Werte der Funktionen y und z. x_1 sei ein benachbarter Wert von x_0 und $h = x_1 - x_0$ die Änderung der Variabeln x, wenn man von x_0 nach x_1 übergeht. k und l sind die entsprechenden Änderungen der Funktionen y und z, so daß also die Werte dieser Funktionen für $x = x_0 + h$, $y_0 + k$ resp. $z_0 + l$ sind. Die Werte der Funktion $Ay + Bz$ für $x = x_0$ und $x = x_0 + h$ sind

$$Ay_0 + Bz_0, \quad A(y_0 + k) + B(z_0 + l);$$

die Änderung der Funktion $Ay + Bz$, für den Fall, wo x von dem Werte x_0 zum Werte $x_0 + h$ übergeht, ist also

$$A(y_0 + k) + B(z_0 + l) - Ay_0 - Bz_0 = Ak + Bl.$$

Das Verhältnis der Änderungen läßt sich durch den Ausdruck

$$A\frac{k}{h} + B\frac{l}{h}$$

darstellen. Ist h ganz klein, so nähern sich die Verhältnisse $\frac{k}{h}$, $\frac{l}{h}$ den Werten y'_0 und z'_0 der Ableitungen y' und z' der Funktionen y, z für $x = x_0$. Folglich nähert sich der Ausdruck $A\frac{k}{h} + B\frac{l}{h}$ dem Ausdruck $Ay'_0 + Bz'_0$. Ist der absolute Wert von h klein genug, so kann der Unterschied der Werte $A\frac{k}{h} + B\frac{l}{h}$ und $Ay'_0 + Bz'_0$ beliebig klein werden. Die Ableitung der Funktion $Ay + Bz$ ist also $Ay' + Bz'$. Setzt man $B = 0$, so wird die Ableitung von Ay gleich Ay'; die Ableitung der Funktion Ax^n z. B. wird nAx^{n-1}, da ja die Ableitung von x^n, nx^{n-1} ist. Setzt man $A = 1$ und B gleich -1, so ist die Ableitung der Summe oder der Differenz der beiden Funktionen gleich der Summe oder der Differenz der Ableitungen der beiden Funktionen. Es ist klar, daß der Satz über die Ableitung der Summe zweier Funktionen sich auch auf drei, vier, ... d. h. auf eine beliebig große Anzahl Funktionen erstreckt.

Ein Polynom besteht aus einer Summe von Monomen. Das Polynom

$$3x^4 - 4x^3 + 7\,x - 1$$

z. B. ist die Summe der Monome $3x^4$, $-4x^3$, $7x$, -1, deren Ableitungen $12x^3$, $-12x^2$, 7, 0 sind. Die Ableitung dieses Polynoms ist also

$$12x^3 - 12x^2 + 7.$$

Da die Ableitung von $\frac{1}{x}$ gleich $-\frac{1}{x^2}$ ist, so ist die Ableitung von $\frac{A}{x}$ gleich $-\frac{A}{x^2}$; die Ableitung von $2x^3 - \frac{1}{x}$ ist $6x^2 + \frac{1}{x^2}$.

285. Hier ein Beispiel zu der in Nr. 279 erörterten Methode des Studiums der Änderung einer Funktion.

Betrachten wir die Funktion

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

Ihre Ableitung ist

$$y' = 6x^2 - 6x = 6x\,(x - 1).$$

Man erkennt sogleich das Vorzeichen der Faktoren x, $x - 1$ für die verschiedenen Werte von x; man kennt also gleich das Zeichen der Ableitung. Ist $x < 0$, so sind die beiden Faktoren negativ, und ihr Produkt positiv. Nimmt x zu und geht durch den Wert 0, so ändert der Faktor x sein Zeichen. Dasselbe ist der Fall für das Produkt, welches auch negativ wird und solange negativ bleibt, bis x den Wert 1 erreicht und übersteigt. Dann ändert der zweite Faktor $x - 1$ sein Zeichen sowie auch das Produkt. Dieses letztere wird positiv und bleibt positiv, wenn x wächst, da keiner der beiden Faktoren sein Zeichen mehr ändert. Die Funktion y nimmt also zu, wenn x von $-\infty$ bis zu 0 wächst, hat für $x = 0$ ein Maximum, dessen Wert -1 ist, nimmt ab, wenn x von 0 bis 1 wächst, hat für

$x = 1$ ein Minimum mit dem Werte -2 und nimmt dann beständig zu, wenn x von 1 bis $+\infty$ wächst. Untersuchen wir nun den Fall, wo x sehr große absolute Werte besitzt. Ist x negativ, so sind alle Glieder des Polynoms negativ, und zwar haben die beiden ersten einen sehr großen absoluten Wert, wenn der absolute Wert von x sehr groß ist. Das Polynom ist negativ und hat einen großen absoluten Wert, so groß als man will, wenn nur der absolute Wert von x genügend groß ist. Dieses drückt man aus, indem man sagt das Polynom sei gleich $-\infty$ für $x = -\infty$. Ist x positiv und von großem absolutem Wert, so enthält das Polynom Glieder von sehr großem absolutem Werte, $2x^3$ und $-3x^2$. Von diesen Werten ist der eine positiv, der andere negativ. Man sieht jedoch, daß das erste Glied das größere ist, da x^3 viel größer als x^2 ist; das Polynom ist also positiv. Hiervon überzeugt man sich, indem man es unter der Form

$$x^2(2x-3)-1$$

schreibt. Ist x ganz groß, so ist dieses auch für die beiden Faktoren x^2 und $2x-3$ der Fall, und es ist klar, daß ihr Produkt eine beliebige Größe annehmen kann, wenn nur x groß genug ist. Dasselbe trifft zu für den Überschuß dieses Produktes über 1. Für $x = +\infty$ wird das Polynom auch gleich $+\infty$. Das Vorausgehende genügt, um uns einen Begriff von der Form der Kurve, deren Gleichung

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

ist, zu geben. Wächst x von $-\infty$ bis $+\infty$, so befindet sich der Punkt, welcher den Wert der Funktion darstellt, zuerst im negativen Koordinatenwinkel, und zwar sehr weit von den Achsen entfernt*). Nimmt x zu, so steigt dieser Punkt höher und nähert sich der x-Achse. Dies tut er so lange, bis x den Wert 0 erreicht. Für diesen Wert erreicht der Punkt die Stelle $A\,(y = -1)$, welche höher als alle umliegenden ist. Die Funktion hat hier ein Maximum, die Tangente der Kurve wird hier parallel zur x-Achse.

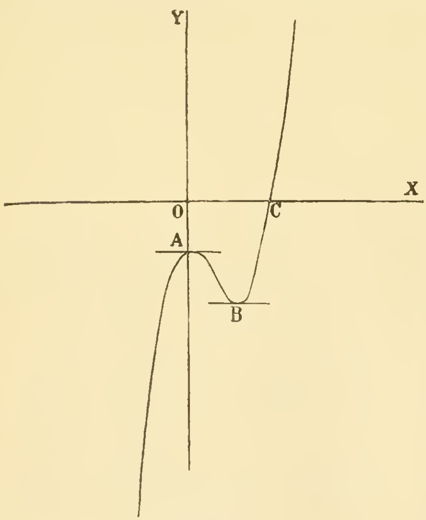


Fig. 144.

*) Man sieht leicht, daß er der y-Achse viel näher als der x-Achse liegt.

Dann sinkt der Punkt wieder, bis x den Wert 1 erreicht. Für $x = 1$ befindet er sich in B ($y = -2$), und dann steigt er wieder. Für $x = 1$ hat die Funktion ein Minimum, die Tangente ist wieder parallel zur x-Achse. Dann steigt der Punkt bis ins Unendliche.

Man kann noch gründlicher verfahren und die Werte von y suchen, welche einfachen Werten von x entsprechen. Z. B. für $x = -2, -1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2$; die entsprechenden Werte von y sind: $-29, -6, -\frac{3}{2}, -1, 3$.

Dieses genügt vollständig für eine annähernde Zeichnung, wie wir sie hier gegeben haben.

286. Man sieht sogleich, daß die Kurve die x-Achse einmal schneidet und zwar nur einmal. Man schließt hieraus, daß es einen Wert von x gibt, und zwar nur einen, für welchen das Polynom $2x^3 - 3x^2 - 1$ den Wert Null annimmt. Anders ausgedrückt: die Gleichung $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ hat nur eine einzige Wurzel. Für $x = 1{,}5$ ist das Polynom negativ, für $x = 2$ dagegen positiv. Es wird also Null für einen Wert von x, welcher zwischen 1,5 und 2 liegt; dies ersieht man aus Nr. 275 und auch gleich aus der Figur. Für $x = 1{,}5$, ist das Polynom viel kleiner an absolutem Wert als für $x = 2$; die Wurzel liegt also dem Werte 1,5 näher als dem Werte 2. Der Verlauf der Kurve zeigt dieses auch. Ersetzt man im Polynom x durch 1,6 und 1,7, so findet man die Zahlen $-0{,}488$ und 0,156. Die Wurzel liegt also sicher zwischen 1,6 und 1,7 und wahrscheinlich näher bei 1,7 als bei 1,6. Man hat schon den Wert der Wurzel bis auf 0,01. Auf diese Art und Weise wäre es nicht schwierig, eine Stelle mehr zu finden und zu konstatieren, daß die Wurzel zwischen 1,67 und 1,68 liegt, und zwar näher bei 1,68 als 1,67. Um noch einen genaueren Wert zu finden, ist es vernünftig, jetzt die in Nr. 258 erörterte Methode anzuwenden.

Die Konstruktion der Kurve, welche

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

zur Gleichung hat, erlaubt nicht nur, die Gleichung $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ annähernd zu lösen, sondern überhaupt alle Gleichungen der Form

$$2x^3 - 3x^2 - 1 = a,$$

in welchen a eine bestimmte gegebene Zahl ist. Es genügt, die Abszissen derjenigen Punkte zu bestimmen, in welchen die Kurve die Parallele $y = a$ zur x-Achse schneidet. Aus dem, was wir über die Kurve wissen, ersehen wir, daß diese Gerade die Kurve nur in einem einzigen Punkte schneidet, wenn a kleiner ist als die Ordinate -2 des Punktes B, oder größer als die Abszisse -1 des Punktes A.

Liegt a zwischen -2 und -1, so schneiden Kurve und Gerade sich in 3 Punkten, und die Gleichung hat drei Wurzeln.

287. Oben haben wir einige Regeln angeführt, mittels derer man die Ableitungen verschiedener einfacher Funktionen finden kann. Ohne mich länger bei dem Problem aufzuhalten, das darin besteht, die Ableitung einer gegebenen Funktion zu finden, muß ich jedoch das umgekehrte Problem erwähnen, das, wie wir unten finden werden, von großer praktischer Bedeutung ist. Es möge die Funktion $f(x)$ angegeben sein; das Problem besteht alsdann darin, eine andere Funktion $F(x)$ zu suchen, deren Ableitung $f(x)$ ist. Eine solche Funktion nennt man gewöhnlich die primitive Funktion von $f(x)$. $\frac{x^2}{2}$ z. B. ist eine primitive Funktion von x, da die Ableitung von $\frac{x^2}{2}$, $\frac{2x^{2-1}}{2} = x$ ist (Nr. 283). Im allgemeinen ist $\frac{ax^{n+1}}{n+1}$ die primitive Funktion von ax^n. Diese Erklärungen genügen, um die primitive Funktion eines beliebigen Polynoms

$$3x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 4x + 5$$

z. B. zu finden. Man erhält das Polynom

$$\frac{3x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x.$$

Kennt man, im allgemeinen, die Ableitungen verschiedener Funktionen, so geben diese uns also gleich Aufschluß über die primitiven Funktionen dieser Ableitungen sowie auch aller derjenigen Funktionen, welche man erhält durch Multiplikation der Funktionen mit konstanten Zahlen, durch Addition oder Subtraktion derselben.

Der Begriff der primitiven Funktion führt uns zu folgendem überaus wichtigem Satz.

Ist $F(x)$ die primitive Funktion von $f(x)$, d. h. ist die Ableitung von $F(x)$ gleich $f(x)$, bildet man ferner eine neue Funktion $F(x) + C$, indem man zu $F(x)$ eine beliebige numerische Konstante hinzufügt, so hat diese neue Funktion auch die Ableitung $f(x)$. Umgekehrt, jede Funktion, deren Ableitung $f(x)$ ist, erhält man, indem man zu $F(x)$ eine beliebige numerische Konstante hinzufügt.

$\Phi(x)$ möge nun eine andere Funktion sein mit der Ableitung $f(x)$; die Ableitung der Differenz $\Phi(x) - F(x)$ der beiden Funktionen $\Phi(x)$, $F(x)$ ist gleich der Differenz ihrer beiden Ableitungen, also gleich 0, da ja die Ableitungen der zwei Funktionen $\Phi(x)$, $F(x)$ beide gleich $f(x)$ sind. Eine Funktion aber, deren Ableitung beständig Null ist, kann nur eine Konstante sein. Bezeichnet man diese Konstante durch C, so erhält man also $\Phi(x) - F(x) = C$.

VIII. Kapitel.

Flächen; Volumen; Elemente der Integralrechnung.

§ 1. Flächenberechnung.

288. Wir wollen uns auf ein Blatt Millimeterpapier eine geschlossene Kurve zeichnen und die Fläche, welche diese Kurve einschließt, zu berechnen suchen. Zuerst müssen wir eine Längen- und eine Flächeneinheit bestimmen. Gemäß den in Nr. 150 angeführten Regeln muß man als Flächeneinheit das Quadrat der angenommenen Längeneinheit wählen, das Quadratdezimeter z. B., wenn das Dezimeter unsere Längeneinheit ist. In diesem Falle wird die Fläche eines Rechteckes durch das Produkt der Zahlen gemessen, welche die Länge der beiden Dimensionen darstellen.

Auf dem Millimeterpapier sind die Einteilungen in Quadratzentimeter gezeichnet. Der Leser braucht nur ein wenig Geduld zu haben, um all die Quadratzentimeter zu zählen, welche innerhalb des Kurvenzuges liegen.*) Hierunter verstehe ich nur diejenigen Quadratzentimeter, die ganz im Innern liegen. Ferner muß man auch diejenigen mitzählen, welche mit der Kurve verschiedene Punkte gemeinsam haben, jedoch nicht über diese hinausgehen. Nehmen wir an der Leser zähle auf diese Art und Weise 232 Quadratzentimeter, welche innerhalb des Kurvenzuges liegen: man kann alsdann sagen, die gesuchte Fläche enthalte 232 Quadratzentimeter, oder auch die Zahl 2,32**) stelle den annähernden Wert der Fläche dar, wenn das Quadratdezimeter als Einheit genommen ist. Dieser Wert ist jedoch zu klein. Um eine obere Grenze des begangenen Fehlers zu erlangen, genügt es, die Quadratzentimeter, welche der Kurvenzug durchquert, mitzuzählen. Diejenigen jedoch, welche er nur streift und deren Punkte alle außerhalb liegen, zählt man nicht mit. Augenscheinlich

---

*) Dieses Zählen wird dadurch erleichtert, daß jeder fünfte Strich stark ausgezogen ist. Das Blatt ist also in Quadrate von 5 Zentimeter Seitenlänge eingeteilt, wovon ein jeder 25 □ cm enthält.

**) Es ist kaum nötig, zu bemerken, daß auf dem Blatte selbst, wie der Leser sogleich bemerkt, das Quadratdezimenter in 100 Quadratzentimeter zerfällt, und das Quadratzentimeter in 100 Quadratmillimeter.

ist die von den 232 schon gezählten und den vom Kurvenzug durchquerten Quadratzentimeter gebildete Fläche größer als die zu berechnende. Bei der ersten Berechnung jedoch haben wir einen Fehler insofern begangen, als die berechnete Fläche kleiner ist als die in Wirklichkeit zu berechnende. Dieser Fehler ist jedoch kleiner als die Fläche aller, vom Kurvenzug durchlaufenen Quadratzentimeter. Durchschneidet die Kurve z. B. 21 Quadratzentimeter, so ist die gesuchte Fläche größer als 232 Quadratzentimeter, jedoch kleiner als 253. Die Zahl, welche ihre Fläche in der gegebenen Einheit darstellt, liegt zwischen 2,32 und 2,53.

Nehmen wir jetzt an, der Leser zähle anstatt der Quadratzentimeter innerhalb der Kurve und auf dem Umfange die Quadratmillimeter. Er merkt sogleich, daß der Streifen, welchen die von der Kurve durchlaufenen Quadratmillimeter bilden, viel schmaler ist als der Streifen der durchlaufenen Quadratzentimeter. Er erhält also eine große Annäherung.

Um die vom Kurvenzug eingeschlossenen Quadratmillimeter zu zählen, bedient man sich zuerst der Quadratzentimeter. Die innerhalb der Kurve liegenden 232 Quadratzentimeter enthalten 23200 Quadratmillimeter; diese braucht man also nicht mehr zu zählen. Alsdann durchgeht man diejenigen Quadratzentimeter, welche von der Kurve durchquert werden, und man zählt, wieviel Quadratmillimeter in diesen außerhalb und wieviel innerhalb des Kurvenzuges liegen; schließlich, wieviel von der Kurve durchlaufen sind. Alsdann sucht man die Summe der außerhalb liegenden und der vom Kurvenzug durchlaufenen Quadratmillimeter. Nehmen wir z. B. an, die erste Summe betrage 912 Quadratmillimeter und die zweite 163. In diesem Falle enthält die gesuchte Fläche $23200 + 912$ oder 24112 Quadratmillimeter, und der Kurvenzug durchläuft einen Streifen von 163 Quadratmillimetern. Mit der angenommenen Flächeneinheit ist die Zahl 2,4112 ein annähernder, jedoch noch zu kleiner Wert der gesuchten Fläche, und der Fehler, den man hierbei begangen, ist kleiner als 0,0163.

Nehmen wir ferner an, die Einteilung des Blattes werde noch weiter geführt und, anstatt beim Quadratmillimeter aufzuhören, gehe man weiter, und teile es in Quadrate ein, welche ein Zehntelmillimeter Seitenlänge haben. Der Leser muß jetzt ein Vergrößerungsglas zur Hand nehmen, um sie zu zählen, und alle Striche des Blattes, der Kurvenzug mit eingriffen, müssen äußerst fein gezeichnet sein, wenn das Folgende einen Sinn haben soll. Sind alle diese Bedingungen erfüllt, so kann der Leser die neuen Quadrate wieder wie vorhin zählen. Zuerst erhält er deren 2411200, welche in den schon gezählten 24112 Quadratmillimetern enthalten sind. Alsdann muß er für jedes von der Kurve durchschnittene Quadratmillimeter die innerhalb liegenden und von der Kurve durchlaufenen kleineren Quadrate wieder zählen; der Streifen der kleinen Quadrate wird jetzt äußerst schmal und der Fehler, den man bei der Flächenberechnung macht, äußerst gering sein.

Theoretisch können die eben besprochenen Operationen stets fortgesetzt werden, und man kann auf diese Art und Weise die gesuchte Fläche mit einer beliebigen Annäherung an den richtigen Wert berechnen. Ich werde auf diesen Punkt in einer späteren Nummer zurückkommen; jedoch kann der Leser dieselbe ohne Schaden beiseite lassen, wenn diese subtilen theoretischen Erörterungen ihn nicht interessieren. In der Praxis muß man bei einer bestimmten Einteilung halt machen. Bedient man sich eines Blattes Millimeterpapier, so ist es angezeigt, bei dem Quadratmillimeter stehen zu bleiben und den innerhalb der Kurve liegenden die Hälfte der von der Kurve durchgezogenen beizuzählen. Im vorhergehenden Beispiele müßte man also 81 oder 82 Quadratmillimeter zu den 24112 innerhalb liegenden hinzufügen, und man erhält auf diese Weise 2,4193 oder 2,4194 für die zu berechnende Fläche. Selbstredend beträgt der Fehler mehrere Quadratmillimeter. Der Leser kann die Zuverlässigkeit dieser Methode erproben, indem er mit einem gegebenen Radius, einem Dezimeter z. B., einen Kreis auf Millimeterpapier zeichnet und dann mit der angegebenen Methode die Fläche dieses Kreises berechnet. Das Resultat kann er mit der Zahl 3,14159 vergleichen, welche er eigentlich finden müßte.

289. Die vorhergehende Methode, welche uns schon einen klaren Begriff gibt von dem, was wir eine von einem geschlossenen Kurvenzug begrenzte Fläche nennen, oder vielmehr, welche uns zeigt, was wir unter der Zahl verstehen, welche diese Fläche mißt, kann in der Praxis sehr nützlich sein.

Anstatt nämlich aufs Geratewohl einen geschlossenen Kurvenzug auf Millimeterpapier zu zeichnen, kann der Leser in einem gewünschten Maßstab den Umriß einer wirklichen ebenen Fläche, eines Feldes z. B. auftragen, oder den Umriß einer begrenzten Gegend, deren Karte er besitzt, wiederzeichnen. Bleiben wir bei der letzten Annahme und nehmen wir z. B. an, diese Karte sei im Maßstab $\frac{1}{20000}$ gezeichnet. Dies ist der Fall für die Karten, welcher der Gerneralstab für die Umgegend von Paris ausarbeiten ließ. Befolgt der Leser die oben erörterte Methode, so kann er annähernd den Wert der begrenzten Fläche finden

Kommen wir auf das erste Beispiel zurück. Dort findet er, daß die Fläche durch die Zahl 2,42 gemessen wird, und zwar bloß mit einem Fehler, der höchstwahrscheinlich kleiner als ein Quadratzentimeter ist. Auf seiner Zeichnung stellt ein Zentimeter 20000 cm oder 200 m dar; ein Quadratzentimeter aber stellt ein Quadrat von zwei Hektometer Seitenlänge dar, also 4 qhm; 242 cm stellen also 968 qhm dar. Auf diese Weise erhält er mit einem Fehler, der kleiner als 4 qhm ist, den Wert der zu berechnenden Fläche. Ich gebe zu, daß diese Berechnung ziemlich ungenau ist; der Leser muß jedoch zugeben, daß das gestellte Problem kaum eine genaue Lösung zuläßt.

290. Wir machen noch darauf aufmerksam, daß dieselbe Methode uns zum Begriff des *Volumens* führt, welches von einer geschlossenen Fläche begrenzt wird, oder auch zu der Zahl, welche dieses Volumen mißt. Nehmen wir z. B. das Kubikmeter als Volumeinheit, und stellen wir uns vor, der Raum sei in Kubikmillimeter eingeteilt. Hierzu genügt es, drei Sorten von parallelen Ebenen zu denken, welche einen Millimeter Abstand voneinander haben, und wo jede Ebene einer Serie senkrecht zu den Ebenen der beiden andern steht. Man denke sich jetzt eine beliebige geschlossene Fläche und die Zahl der Kubikmillimeter, welche sie beinahe ausfüllen; die Schicht Millimeter, welche von der Fläche durchschnitten werden, ist sehr dünn; ihr Volumen also sehr klein. Stellt N die Zahl der Kubikmillimeter dar, welche innerhalb der Fläche liegen, und n diejenigen, welche die Fläche schneidet, so liegt die Zahl, welche das gesuchte Volumen in der gewählten Einheit mißt, zwischen

$$\frac{N}{10^9}, \quad \frac{N+n}{10^9};$$

jede dieser beiden Zahlen stellt mit einem Fehler, der kleiner als $\frac{n}{10^9}$ ist, das gesuchte Volumen dar. Nimmt man an, diese Methode könne für die Berechnung des Erdglobus angewandt werden, so sieht man klar, daß die kleine vernachlässigte Schicht gegenüber dem Gesamtvolumen der Erde ganz verschwindet.

291. Kehren wir nun zu den ebenen Flächen zurück, und behandeln wir sie vom theoretischen Standpunkte aus. Der Leser merkte ganz gut, daß an den gegebenen Erörterungen etwas fehlte, daß ihnen die mathematische Strenge abging. Wir nahmen seine Einbildungskraft in Anspruch, um ihm zu zeigen, daß die vernachlässigte Fläche, (der bei jeder Berechnung vernachlässigte schmale Streifen Quadratzentimeter oder Quadratmillimeter) ganz klein sei im Vergleich zu der zu berechnenden Fläche, und daß dieser Streifen beliebig klein gemacht werden könne, falls man die Einteilung immer weiter verfolgt. Auf diesen Punkt wollen wir jetzt genauer eingehen*): man kann es jedoch nur tun, indem man die Natur der Kurve genauer präzisiert und ihr eine genügende *Regelmäßigkeit* zuschreibt. Wir nehmen an, man könne die Kurve in eine begrenzte Anzahl Bogen zerlegen, von denen ein jeder die Eigenschaft besitze, welche wir im folgenden anführen wollen. Hierzu denken wir uns die Kurven in ein Koordinatensystem eingezeichnet, dessen Achsen parallel zu den Linien des Papieres laufen.

AB sei der in Frage stehende Bogen. Wir nehmen an, die Parallelen zur y-Achse schneiden ihn nur in einem Punkte, so daß die Ordinate eines beliebigen seiner Punkte, eine bestimmte Funktion seiner Abszisse ist. Ferner nehmen wir an, diese Funktion sei stetig und nehme mit wachsender Abszisse entweder immer zu, oder immer ab, oder bleibe konstant. Auf dem in Betracht kommenden Bogen gibt es keine Schwankungen. Wir besprechen jetzt den Fall, wo die Ordinate mit wachsender Abszisse immer zunimmt.

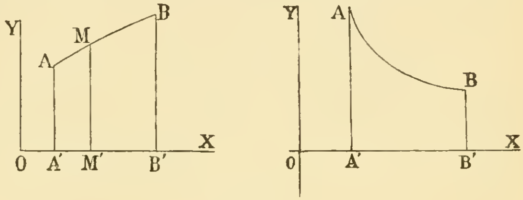


Fig. 145.

Man erkennt ohne Mühe, wie ein Bogen, der in ein solches Netz eingezeichnet ist, sich verhält.

Betrachten wir ein Rechteck $OPRQ$, das man durch Parallelen zu den Seiten in eine bestimmte Anzahl gleicher oder ungleicher Rechtecke zerlegt hat. Um die Sache zu erleichtern, nennen wir das unterste linke Rechteck das erste, das oberste rechte dagegen das letzte.

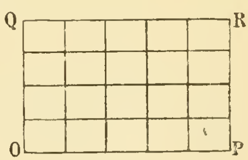


Fig. 146.

Wir wollen zeigen, daß, wenn die Basis OP und die Seite OQ des Rechteckes $OPQR$ p bzw. q Teile, das Rechteck $OPQR$ also pq kleinere Rechtecke umfaßt, ein Bogen AB, der sich von einem Punkte A innerhalb des ersten Rechteckes der Einteilung, nach einem Punkte B innerhalb des letzten

*) Wir haben hier nicht nötig, diese Frage ausführlich zu behandeln; auch haben wir uns nur dabei aufgehalten aus vielleicht übertrieben erscheinender Gewissenhaftigkeit. Der Leser kann ohne Nachteil diese Nummer beiseite lassen und auch die beiden folgenden Nummern schnell übergehen.

Rechteckes hinzieht und dessen Ordinate mit wachsender Abszisse stets zunimmt, höchstens $p+q-1$ Rechtecke durchläuft. Der Bogen AB durchläuft genau $p+q-1$ Rechtecke, wenn er durch keinen ihrer Eckpunkte geht.

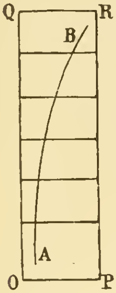


Fig. 147.

Die Richtigkeit dieses Satzes leuchtet sogleich ein, wenn p für einen beliebigen Wert von q gleich 1 ist. Man hat alsdann q kleine Rechtecke, welcher der Bogen AB alle durchläuft; und da $p=1$ ist, erhält man

$$q = p + q - 1.$$

Nehmen wir jetzt an, dieser Satz sei aufgestellt worden für den Fall, wo q einen beliebigen Wert hat, p aber gleich oder kleiner als n sei. Wir wollen alsdann beweisen, daß der Satz auch noch für $p=n+1$ zutrifft.

$OPRQ$ sei ein Rechteck, dessen Basis in $p=n+1$ Teile eingeteilt ist (Fig. 148). M möge der letzte Einteilungspunkt sein, so daß OM also in n-Teile eingeteilt ist. MN ist eine durch den Punkt M gelegte Parallele zu OQ. Die Seite OQ ist in q Teile eingeteilt. Um die Teilrechtecke zu erhalten, legt man durch die Einteilungspunkte Parallelen zu OP, welche die Geraden MN, PR usw. in q Teile zerlegen. Der Bogen AB, den wir von A nach B durchlaufen, bleibt zuerst im Rechteck $OMNQ$, schneidet MN in I und tritt an dieser Stelle in das Rechteck $MPRN$ über. Wir nehmen an, der Punkt I befinde sich zwischen zwei Einteilungspunkten E und F der Geraden MN. Die Parallelen GH, KL, welche man durch diese Punkte zur Basis legen kann, sind gezeichnet. Wir nehmen an, OK enthalte a Teile von OQ; OG enthält deren $a-1$ und GQ, $q-a+1$. In dem Rechteck $OMFK$ ist die Basis in n Teile eingeteilt, die Höhe OK in a Teile. Dieses Rechteck enthält an kleinere Rechtecke. Bevor der Bogen AB das Rechteck verläßt, befindet er sich in dem letzten der Einteilungsrechtecke; ist er von dem ersten ausgegangen, so hat er also höchstens $a+n-1$ Einteilungsrechtecke durchlaufen, da ja, gemäß angenommener Hypothese, der Satz wahr ist für $p=n$. Der Bogen tritt alsdann in das erste Teilrechteck des großen Rechteckes $EHRN$ ein; dieses letztere enthält $q-a+1$ Teilrechtecke, welche AB alle durchlaufen muß: im ganzen durchläuft der Bogen also höchstens

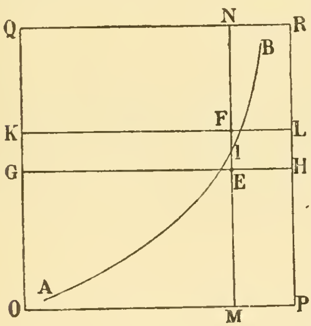


Fig. 148.

$$a + n - 1 + q - a + 1 = n + q = p + q - 1$$

Einteilungsrechtecke. Würde der Bogen AB die Linie MN nicht zwischen E und F, sondern im Punkte F selbst begegnen, so sieht man klar, daß AB in diesem Falle ein Teilrechteck $EHLF$ weniger durchliefe; der Satz bleibt aber natürlich bestehen.

Der Satz ist bewiesen für einen beliebigen Wert von q und für $p = 1$; nach dem eben angeführten Beweis bleibt er bestehen, wenn q einen beliebigen Wert annimmt und $p = 2$ wird; dann für $p = 3$, 4, . . . Er ist also wahr für beliebige Werte von p und q*).

Hieraus geht klar hervor, daß, wenn der Bogen AB ganz in dem Rechteck $OPRQ$, das man in pq Teilrechtecke zerlegen kann, enthalten ist, derselbe nicht mehr als $p + q - 1$ Teilrechtecke durchlaufen kann.

Nehmen wir jetzt an, der Bogen AB sei auf Millimeterpapier aufgezeichnet und durchlaufe eine Anzahl k Quadratzentimeter. Betrachten wir eines dieser Quadrate und betrachten wir den Teil $A'B'$ des Bogens AB, welcher innerhalb dieses Quadrates liegt. Er schneidet höchstens 19 qmm, welche alle zusammen einen Streifen von höchstens $\frac{20}{100}$ oder $\frac{1}{5}$ Quadratzentimeter ausmachen. Der Streifen, den die Gesamtkurve AB durchläuft, ist geringer als $\frac{1}{5}$ von k Quadratzentimeter; vollzöge man die Einteilung bis zum Zehntelmillimeter, so hätte der Streifen von Quadratzehntelmillimeter, welche die Kurve durchläuft, eine Gesamtfläche, welche kleiner wäre als $\frac{1}{5}$ der vorhergehenden. Also geringer als $\frac{1}{25}$ von k Quadratzentimeter. Führt man diese Einteilung theoretisch noch weiter, so gelangt man zu einem Streifen, dessen Fläche wieder kleiner ist als $\frac{1}{5}$ der vorhergehenden, kleiner als $\frac{1}{125}$ von k Quadratzentimeter usw. Man kann auf diese Weise eine Potenz von $\frac{1}{5}$ finden, die beliebig klein ist. Vorausgesetzt also, daß die Einteilung fein genug sei, kann der Streifen der kleinen Quadrate, welche AB durchläuft, beliebig klein werden. Dasselbe ist der Fall für den Streifen, welchen ein aus einer begrenzten Anzahl Bogen zusammengesetzter Kurvenweg, wie z. B. AB, durchläuft. Theoretisch kann man auf diese Art und Weise eine gegebene Fläche mit einer beliebigen Annäherung berechnen.

---

*) Diese Art der Beweisführung, die auf *vollständiger Induktion* beruht, wird häufig in der Mathematik angewandt. In Nr. 296 findet man eine andere Anwendung desselben.

292. Der Begriff der Zahl, welche eine Fläche mißt, die man aus der Zusammenstellung von Quadraten erhält, deren Seiten vermittels der Längeneinheit meßbar sind, ist jetzt klar; diese Fläche wird gebildet durch eine Zusammenstellung von Flächeneinheiten oder Teilen dieser Einheit, geradeso wie eine Strecke, die sich vermittels der Längeneinheit messen läßt, als aus einer Zusammenstellung von Längeneinheiten oder von Teilen dieser Einheit herkommend gedacht werden kann. Handelt es sich aber um eine Fläche, welche durch einen geschlossenen Kurvenzug begrenzt ist, so ist der Begriff der Zahl, welche dieser Fläche in einem gewissen Sinne anhaftet, nicht so ganz einfach. Wir haben jedoch gefunden, daß diese Zahl sich nichtsdestoweniger mit Genauigkeit bestimmen läßt, wenn man einfach annimmt, daß sie einerseits größer sein muß als die Zahl, welche die Fläche der Quadrate mißt, die innerhalb der geschlossenen Kurven liegen, andererseits kleiner als die der Fläche, welche durch die Quadrate gebildet wird, die die Kurve ganz einschließen. Eine solche Annahme, welche genügt, um eine Messung vorzunehmen, liegt doch ganz sicher in dem verschwommenen Begriff, den wir von einer Fläche haben und von der Zahl, welche diese Fläche mißt. In einer logischen Auseinandersetzung muß man diese Zahl genau definieren. Dies tut man, indem man als Definition das Resultat der Berechnung selbst annimmt, welche man oben beschrieben. Die in Frage stehende Zahl wird durch Definition als zwischen zwei anderen liegend betrachtet. Diese zwei letzteren kann man leicht bestimmen, und sie können einen beliebig kleinen Unterschied aufweisen. Diese zwei Zahlen sind nichts anderes als die Maße zweier Quadratsummen, deren Bildung wir oben erörtert. Ich beschränke mich darauf, auf diesen Standpunkt aufmerksam zu machen, obschon das vorliegende Buch nicht auf demselben steht.

293. Betrachten wir zwei Flächen (A), (B), die so nebeneinander liegen, daß ihre Umrisse sich auf einer längeren Strecke berühren, daß sie also auf dieser Strecke einen gemeinsamen Umriß haben. Betrachten wir ferner die Fläche (C), welche man erhält, indem man den gemeinsamen Umriß auswischt und die übrigen Umrisse beibehält. A, B, C mögen die Zahlen sein, welche die Flächen*) (A), (B), (C) messen; man erhält alsdann

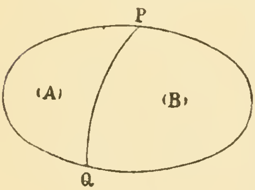


Fig. 149.

$$C = A + B.$$

*) Die Symbole (A), (B), (C) bezeichnen Figuren; A, B, C bezeichnen Zahlen.

Der Leser wird diesen Satz, den man schon in Nr. 151 in bezug auf die Fläche der Vielecke, angenommen hat, als dem Begriff einer Fläche anhaftend betrachten. Es ist vielleicht nicht ohne Nutzen, darauf aufmerksam zu machen, daß derselbe aus den vorhergehenden Erwägungen erfolgt. Nehmen wir an, die Zeichnung sei auf ein Blatt Papier aufgetragen, welches in lauter feine Quadrate eingeteilt ist. Wir bezeichnen mit C', A', B' die Zahlen, welche die Flächen der Quadrate messen, die innerhalb der Umrisse (C), (A), (B) liegen, und durch ε die Zahl, welche die Gesamtfläche derjenigen Quadrate mißt, welche der Bogen PQ durchläuft. Man erhält alsdann

$$C' = A' + B' + \varepsilon.$$

Die Einteilung in Quadrate kann nun jedoch so fein gedacht werden, daß ε einerseits beliebig klein wird, andererseits die Zahlen A', B', C' sich beliebig wenig von den Zahlen A, B, C unterscheiden. Ist die Einteilung fein genug, so ist der Fehler, den man begeht, indem man einerseits $C' = A' + B'$ setzt, andererseits die Zahlen A', B', C' durch die Zahlen A, B, C ersetzt, beliebig klein. Der Fehler, den man begeht, indem man sagt, C sei gleich $A + B$ (und der in nichts anderem als in dem absoluten Werte des Unterschiedes $C - A - B$ besteht, und nicht wie die vorhergehenden Fehler von dem Einteilungsmodus abhängt), kann also auch beliebig klein werden. Dieser Fehler ist notwendigerweise Null, denn eine *konstante* Zahl, von der man beweisen kann, daß ihr absoluter Wert kleiner ist als eine beliebige Zahl, ist notwendigerweise Null.

Umgekehrt ist die Zahl A, welche die Fläche (A) mißt, der Unterschied der beiden Zahlen C und B, welche die Flächen (C) und (B) messen.

Es ist kaum nötig, darauf aufmerksam zu machen, daß die Zahl C größer ist als die Zahlen A und B. Dieses ist, in allgemeiner Form, das Prinzip, welches zur Berechnung einer ebenen Fläche führt. Man betrachtet nämlich diese Fläche als durch eine Zahl gemessen, welche größer ist als die Summe der Quadrate, die innerhalb dieser Fläche liegen.

294. (A) stelle eine ebene, durch einen Umriß begrenzte Fläche dar und A die Zahl, welche diese Fläche mißt. Wir nehmen an, die Fläche (A) werde jetzt durch Homothetie transformiert und zwar in dem Verhältnis k. (B) sei die Fläche nach der Transformation und B ihre Maßzahl. Man erhält alsdann $B = Ak^2$.

Denken wir uns die Figur (A) auf ein Blatt Papier gezeichnet, das in sehr feine Quadrate eingeteilt ist, und A' möge die Zahl sein, welche die Fläche der innerhalb (A) liegenden Quadrate mißt; A' unterscheidet sich nur sehr wenig von A. Alle Quadrate der Einteilung werden in andere Quadrate transformiert, die ähnlich wie die ersten liegen (Nr. 172). Die Zusammenstellung der Quadrate, deren Flächeninhalt A' ist, wird in eine andere umgewandelt, deren Flächeninhalt B' gleich $A'k^2$ ist (Nr. 173). Die Quadrate, in welchen Punkte des Umrisses von (A) liegen, haben als Bild Quadrate, durch welche der Umriß von (B) geht (Nr. 172). Die ersten bildeten den Streifen der Quadrate, welche der Umriß durchläuft, und schlossen die Fläche A' ein; die zweiten bilden einen Streifen von Quadraten, durch welche der Umriß von (B) geht, und schließen die Fläche B' ein. Die innerhalb (A) liegenden Quadrate haben als Bild die innerhalb B liegenden. Ist die Einteilung in Quadrate fein genug, so begeht man beliebig kleine Fehler, wenn man A' durch A und B' durch B ersetzt. Sagt man, B sei gleich Ak^2, wie B' gleich $A'k^2$ sei, so begeht man einen Fehler, von dem man bei genügender kleiner Einteilung behaupten kann, er sei kleiner als jede beliebig kleine Zahl. Man begeht also überhaupt keinen Fehler, da der Unterschied zwischen B und Ak^2 nicht von der Einteilung in Quadrate abhängt.

Da ähnliche Figuren nichts anders sind als homothetische Figuren, erlaubt die eben bewiesene Regel, von einer Fläche auf eine ähnliche überzugehen. Die Zahl k muß alsdann durch das Verhältnis zweier entsprechender Längen der beiden Figuren ersetzt werden. Diese Zahl nennt man das Ähnlichkeitsverhältnis. Ich nahm mir die Freiheit, diesen Satz schon in dem Beispiel der Nr. 289 anzuwenden, ohne ihn jedoch bewiesen zu haben. Hat der Leser nur irgendwelche Fertigkeit im Zeichnen, so hat er einen hinreichenden Begriff von der Ähnlichkeit der Figuren, um die damals gegebenen Erklärungen zu verstehen. Der soeben bewiesene Satz zeigt, daß sie allgemein gültig sind.

Ersetzt man die Quadrate durch Würfel, so ersieht man, daß dieser Satz sich auf Körper anwenden läßt. Betrachtet man einen Körper (A), dessen Kubikinhalt durch die Zahl A gemessen wird, und transformiert man diesen Körper durch Homothetie in einem andern (B), dessen Kubikinhalt durch die Zahl B angegeben wird, so erhält man $B = Ak^3$. k ist das Verhältnis der Homothetie.

Die in Nr. 288 erörterte Methode erlaubt einerseits den Begriff der Fläche zu erklären, andrerseits eine gegebene Fläche annähernd zu berechnen. Jetzt will ich zeigen, wie man Flächen, die durch geometrisch definierte Kurven begrenzt sind, genau berechnen kann.

295. Betrachten wir zuerst ein in O rechtwinkliges Dreieck AOB (Fig. 150). a, b seien die Maßzahlen der Katheten OA, OB. Teilen wir jetzt OA in n gleiche Teile AC, CD, $DE, \ldots$ Durch die Einteilungspunkte legen wir die Parallelen CC', DD', $EE', \ldots$ zur Kathete OB, bis zum Schnittpunkte mit der Hypotenuse; dann bilden wir die Rechtecke $CDD''C'$, $DEE''D', \ldots$, welche alle innerhalb des Dreiecks liegen, dann die Rechtecke $ACC'A'''$, $CDD'C''', \ldots$, welche alle über das Dreieck hinausliegen. Wir erhalten so $n-1$ Rechtecke der ersten Art, welche ich einbeschriebene, und n-Rechtecke der zweiten Art, welche ich umbeschriebene nennen will.

Die Summe der $n-1$ einbeschriebenen Rechtecke ist kleiner als die Fläche des Dreiecks. Die Summe der umbeschriebenen ist größer als diese Fläche. Der Unterschied dieser beiden Summen ist gleich der Summe der n kleinen Rechtecke, welche die n Teile AC', $C'D'$, $D'E', \ldots$ der Hypotenuse zur Diagonale haben. Verschiebt man jedes dieser kleinen Rechtecke parallel zur Kathete AO, so daß es in das letzte umbeschriebene Rechteck zu liegen kommt, so sieht man, daß alle zusammen dieses letzte Rechteck ausfüllen. Der Unterschied der Summen der umbeschriebenen und der $n-1$ einbeschriebenen Rechtecke ist also gleich dem letzten umbeschriebenen Rechteck, dem größten von allen. Man sieht sogleich ein, daß dieser Unterschied beliebig klein werden kann, wenn nur n groß genug wird, da ja die Grundlinie dieses letzten Rechteckes beliebig klein genommen werden kann.

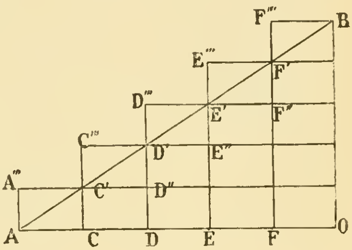


Fig. 150.

Vorausgesetzt also, daß n groß genug genommen wird, wird der Unterschied zwischen den Summen der Flächen der umbeschriebenen und der einbeschriebenen Rechtecke beliebig klein. Die zwei Summen aber schließen immer die gesuchte Fläche des Dreiecks ein. Die eine sowohl als die andere geben uns alsdann mit beliebiger Annäherung die genaue Fläche des Dreiecks. Nimmt n immer mehr zu, so nähern beide sich mit beliebiger Genauigkeit der Zahl, welche diese Fläche mißt. Beide haben diese Zahl als Grenzwert.

Man hat also die eine oder die andere dieser Summen zu berechnen. Nimmt n immer mehr zu, so nähert diese Summe sich unaufhörlich einer bestimmten Grenze, und diese Grenze ist die gesuchte Maßzahl der Fläche des Dreiecks.

Die Grundlinie eines jeden einbeschriebenen oder umbeschriebenen

Rechtecks hat eine Länge $\frac{a}{n}$. Die Höhen CC', DD', EE', ..., OB der Rechtecke betragen resp.

$$\frac{b}{n},\ 2\frac{b}{n},\ 3\frac{b}{n},\ldots,\ n\frac{b}{n}=b.$$

Die Summe der Fläche der einbeschriebenen Rechtecke beträgt also

$$\frac{ab}{n^2}+\frac{2ab}{n^2}+\frac{3ab}{n^2}+\cdots+\frac{(n-1)ab}{n^2}=\frac{ab}{n^2}(1+2+3+\cdots+n-1).$$

Die Summe der Flächen der umbeschriebenen Rechtecke beträgt

$$\frac{ab}{n^2}+\frac{2ab}{n^2}+\frac{3ab}{n^2}+\cdots+\frac{nab}{n^2}=\frac{ab}{n^2}(1+2+3+\cdots+n).$$

Die Summe*) der n ersten Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ ist nun aber gleich $\frac{n(n+1)}{2}$; die Summe der $n-1$ ersten also $\frac{n(n-1)}{2}$.

Folglich ist die Summe der einbeschriebenen Rechtecke

$$\frac{n(n-1)ab}{2n^2}=\frac{(n-1)ab}{2n}.$$

Die Summe der umbeschriebenen Rechtecke ist

$$\frac{n(n+1)ab}{2n^2}=\frac{(n+1)ab}{2n}.$$

Man kann leicht einsehen, daß die Differenz dieser beiden Summen $\frac{ab}{n}$, d. h. die Fläche des letzten umbeschriebenen Rechteckes ist. Jede dieser beiden Summen ist ein Näherungswert der Fläche des Dreiecks. Die eine ist zu klein, die andere zu groß. Der begangene Fehler ist kleiner als $\frac{ab}{n}$. Nehmen wir jetzt an, n nehme immer mehr zu. Die Zahl $\frac{(n-1)ab}{2n}$ ist nichts anders als das Produkt von $\frac{ab}{2}$ mit $\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$.

Angenommen, n sei sehr groß, so unterscheidet sich diese Zahl

---

*) Um dies einzusehen, genügt es, die Zahlen 1, 2, 3, ... n in wachsender und dann darunter in abnehmender Reihenfolge zu schreiben:

$$\begin{array}{lllll} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots\ldots n, \\ n, & n-1, & n-2, & n-3, & \ldots 1. \end{array}$$

Addiert man alle diese Zahlen, so erhält man die gesuchte Summe zweimal. Addiert man nun zwei untereinander stehende Zahlen, so erhält man jedesmal $n+1$ als Summe. Diese Summe wird n mal wiederholt. Das Zweifache der gesuchten Summe ist also $n(n+1)$.

$1 - \frac{1}{n}$ beliebig wenig von 1. In diesem Fall ist also $\frac{(n-1)ab}{2n}$ auch beliebig wenig von $\frac{ab}{2}$ verschieden. Mit anderen Worten: diese letzte Zahl ist die Grenze der veränderlichen Zahl $\frac{(n-1)ab}{2n}$ für den Fall, wo n beständig wächst. Auf dieselbe Art und Weise sieht man, daß unter denselben Umständen die Summe $\frac{(n+1)ab}{2n}$ der Flächen der umbeschriebenen Rechtecke $\frac{ab}{2}$ zur Grenze hat. Dieses also ist die Formel, welche die Fläche eines Dreiecks darstellt.

Ich weiß ganz gut, daß es dem Leser anfangs unnütz erschien, so viele Anstrengungen zu machen, um zu einem längst bekannten*) Resultat zu gelangen, aber er sah gewiß bald ein, daß die vorausgehende Methode auch auf andere Fälle angewandt werden kann.

296. Wenden wir diese Methode an, um die Fläche einer Parabel zu bestimmen. Betrachten wir eine Parabel, deren Gleichung $x^2 = 2py$ sei, und suchen wir die Fläche zu berechnen, welche zwischen der x-Achse, der Parabel und einer Parallele AA' zur y-Achse liegt. Diese Parallele zur y-Achse ist durch einen Punkt A der x-Achse gelegt, welcher eine positive Abszisse a hat. Wir teilen OA in n gleiche Teile und legen durch die so erhaltenen Einteilungspunkte $B, C, D, \ldots$ Parallelen $BB', CC', DD' \ldots$ zur y-Achse bis zum Schnittpunkte mit der Parabel. Die Figur OAA' sehen wir als Dreieck an und zeichnen wie vorher Rechtecke in dieses Dreieck und auch darüber hinaus. Die Summe der Flächen der ersteren, welche $n-1$ an der Zahl sind, ist geringer als die gesuchte Fläche. Die Summe der Flächen der zweiten, deren Zahl n, ist dagegen größer. Die Differenz dieser beiden Summen ist gleich der Summe der kleinen Rechtecke**), in welchen O und B', B' und C', C' und D' ... entgegengesetzte Scheitelpunkte sind. Verlegt man diese Rechtecke wieder parallel zur x-Achse, so daß sie wieder alle in das letzte über die Parabel hinausragende Rechteck zu

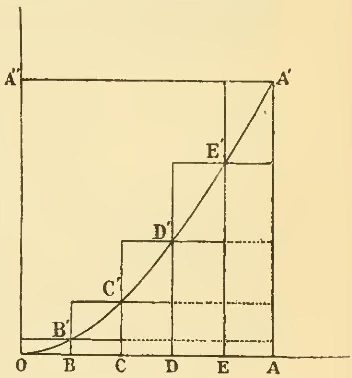


Fig. 151.

*) Da jedes Dreieck sich in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen läßt, so führt dieses Resultat also gleich zu einer Regel, welche erlaubt, ein beliebiges Dreieck auszumessen.

**) Diese kleinen Rechtecke sind nicht mehr, wie im vorigen Falle, alle gleich groß.

liegen kommen, so sieht man, daß sie dieses Rechteck wieder genau ausfüllen. Die Differenz dieser beiden Summen ist gleich der Fläche dieses letzten großen Rechteckes. Dieses Rechteck kann beliebig klein gemacht werden, wenn n klein genug genommen wird. In diesem Falle mißt wiederum eine jede dieser beiden Summen die zu suchende Fläche mit beliebiger Genauigkeit. Man kann sicher sein, daß beide mit unaufhörlich wachsendem n sich einer Grenze nähern und daß diese Grenze gerade die Maßzahl der Fläche OAA' ist.

Die Abszissen der Punkte $B, C, D, \ldots A$ sind

$$\frac{a}{n}, \quad \frac{2a}{n}, \quad \frac{3a}{n}, \ldots, \quad n\frac{a}{n} = a.$$

Die Ordinaten der entsprechenden Punkte $B', C', D', \ldots, A'$ sind mithin

$$\frac{a^2}{2pn^2}, \quad \frac{4a^2}{2pn^2}, \quad \frac{9a^2}{2pn^2}, \ldots, \quad \frac{n^2a^2}{2pn^2} = \frac{a^2}{2p}.$$

Diese Ordinaten sind nichts anders als die Höhen unserer Rechtecke, welche alle eine Grundlinie von der Länge $\frac{a}{n}$ haben. Die Summe der Flächen der $n-1$ einbeschriebenen Rechtecke ist also

$$\frac{a^3}{2pn^3} + \frac{4a^3}{2pn^3} + \frac{9a^3}{2pn^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2a^3}{2pn^3};$$

oder

$$\frac{a^3}{2pn^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\right].$$

Die Summe der über die Parabel hinausragenden n Rechtecke ist desgleichen

$$\frac{a^3}{2pn^3} + \frac{4a^3}{2pn^3} + \frac{9a^3}{2pn^3} + \cdots + \frac{n^2a^2}{2pn^3};$$

oder

$$\frac{a^3}{2pn^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right].$$

Die Summe der Quadrate der n ersten Zahlen ist aber*)

*) Ich beschränke mich darauf, diese Formel nachzuprüfen. Man sieht leicht ein, daß sie für kleine Werte von n richtig ist. Ich nehme nun an, sie sei richtig für Werte von n, welche gleich p oder kleiner als p sind, und will beweisen, daß sie für $n = p + 1$ bestehen bleibt. Ich will mit andern Worten beweisen, daß

$$(1) \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + p^2 + (p+1)^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

ist. In der ersten Seite dieser Gleichung aber ist die Summe der Quadrate der p ersten Zahlen wie wir wissen, $\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$, es bleibt also noch zu beweisen, daß

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Die der Quadrate der $n-1$ ersten also

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Die Summe der Flächen der einbeschriebenen Rechtecke beträgt also

$$\frac{(n-1)(2n-1)a^3}{12pn^2} = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \times \frac{a^3}{12p};$$

die der umbeschriebenen Rechtecke dagegen

$$\frac{(n+1)(2n-1)}{n^2} \times \frac{a^3}{12p}.$$

Die Zahl

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} = \frac{n-1}{n} \times \frac{2n-1}{n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

ist nun aber das Produkt zweier Faktoren, die, wenn wir n genügend groß wählen, sich beliebig wenig von 1 resp. 2 unterscheiden. Ist n also genügend groß, so unterscheidet dieses Produkt sich also beliebig wenig von 2. Dieses veränderliche Produkt hat also, mit unaufhörlich wachsendem n, die Zahl 2 als Grenzwert. Dasselbe ist der Fall für die Zahl

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Vorausgesetzt also, daß n genügend groß sei, nähern sich die beiden Zahlen

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \times \frac{a^3}{12p}, \quad \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \times \frac{a^3}{12p},$$

zwischen denen die Maßzahl der Fläche OAA' liegt, unaufhörlich dem Grenzwerte $2\frac{a^3}{12p}$ oder $\frac{a^3}{6p}$. Dieses ist die Formel, welche die gesuchte Fläche darstellt.

---

(3) $$\frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

ist. Die erste Seite läßt sich nun aber schreiben

$$\frac{p(p+1)(2p+1)+6(p+1)^2}{6} = \frac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6}.$$

Der Leser kann sich jedoch leicht davon überzeugen, daß $2p^2+7p+6$ gleich dem Produkte $(p+2)(2p+3)$ ist. Die Gleichung (1) ist also bewiesen: Nun ist aber dieser Satz richtig für $n=1$, er ist also auch richtig für $n=2$ und folglich für $n=3$ usw. Dieses ist wiederum eine Anwendung der Induktionsmethode (Nr. 291).

Bezeichnet man mit b die Ordinate des Punktes A, so erhält man $a^2 = 2bp$ und folglich auch

$$\frac{a^3}{6p} = \frac{a^2 \cdot a}{6p} = \frac{2bpa}{6p} = \frac{ab}{3}.$$

Die Fläche OAA' ist also ein Drittel des Rechteckes $OAA'A''$; hieraus schließt man, daß die Fläche $OA'A''$ zwei Drittel der Fläche des nämlichen Rechteckes beträgt.

In Nr. 327 will ich auf diese Methode zurückkommen, um sie in voller Allgemeinheit zu erörtern. Sie ist ganz natürlich. Wie die zwei eben behandelten Beispiele erkennen lassen, verdankt sie ihren Erfolg dem Umstand, daß man durch eine Umwandlung des Ausdrucks der Summe der Rechtecke ohne Schwierigkeit den Grenzwert dieser Summe bestimmen kann. Übrigens besteht die ganze Schwierigkeit nur in der Bestimmung dieser Grenze, und in jedem speziellen Falle muß diese Schwierigkeit durch einen besonderen Kunstgriff gehoben werden.

Der Leser wird daher gleich einsehen, um wieviel tiefer und leichter anwendbar die Methode ist, welche ich im folgenden Paragraphen erörtern will.

§ 2. Elemente der Integralrechnung.

297. Betrachten wir die Kurve, welche durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

dargestellt wird. Um Einzelheiten, die kein Interesse bieten, zu übergehen, beschränke ich mich auf den Fall, wo diese Kurve oder der Teil, den man in Betracht zieht, oberhalb der Abszissenachse liegt. Mit andern Worten, die Funktion $f(x)$ möge zwischen den Grenzen, zwischen welchen wir sie betrachten, positiv sein.

Wir setzen gleichfalls ihre Stetigkeit zwischen diesen nämlichen Grenzen voraus.

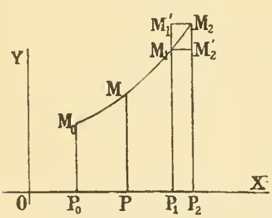


Fig. 152.

M_0, M mögen zwei Punkte der Kurve sein, deren Abszissen OP_0, OP durch x_0 und x dargestellt werden. Die zu lösende Aufgabe besteht nun darin, die Fläche zu berechnen, welche zwischen den Ordinaten P_0M_0, PM, der Kurve M_0M und der x-Achse eingeschlossen liegt. Betrachtet man x_0 als eine gegebene Zahl und x als eine Variable, welche größer als x_0 ist, so hängt die Fläche P_0M_0, MP augenscheinlich von x ab. Jedem Werte von x entspricht ein bestimmter Wert dieser Fläche. Die Zahl, welche diese Fläche mißt, ist eine *Funktion* von x; diese Funktion wird Null, wenn x gleich x_0 wird, nimmt dagegen zu, wenn x wächst. Wir stellen diese Funktion durch $g(x)$ dar und suchen den Wert ihrer Ableitung zu bestimmen für $x = x_1 = \overline{OP_1}$. Für $x = x_1$ mißt der Wert $g(x_1)$ der Funktion $g(x)$ die Fläche $P_0 P_1 M_1 M_0$. Lassen wir jetzt x_1 um den positiven Wert $h = P_1 P_2$ zunehmen. Die Funktion $g(x)$, deren Wert $g(x_1)$ war für $x = x_1$, erhält einen Wert $g(x_1 + h)$ für $x = x_1 + h$. Die Änderung beträgt $g(x_1 + h) - g(x_1)$. Es ist dies das Maß der Fläche $P_1 P_2 M_2 M_1$; diese wird begrenzt durch die Ordinate $P_1 M_1$, $P_2 M_2$, welche den Abszissen x_1 und $x_1 + h$ entsprechen. Diese Fläche liegt zwischen den beiden Rechtecken $P_1 P_2 M_2' M_1$, $P_1 P_2 M_2 M'_1$. Für den Fall, daß, wie wir in der Figur angenommen, die Funktion $f(x)$ zunimmt, wenn x von x_1 bis $x_1 + h$ wächst, ist das erste Rechteck das kleinere, das zweite dagegen das größere. Für den Fall, wo die Funktion $f(x)$ abnähme, wenn x von x_1 bis $x_1 + h$ zunähme, träte das Gegenteil ein. In beiden Fällen aber ist die Fläche $P_1 P_2 M_2 M_1$ immer zwischen diesen beiden Rechtecken eingeschlossen. Diese Rechtecke haben als Fläche das Produkt der gemeinsamen Grundlinie mit den entsprechenden Höhen, den Ordinaten $f(x_1)$ und $f(x_1 + h)$ der Punkte M_1, M_2. Die Zahlen

$$hf(x_1),\ g(x_1 + h) - g(x_1),\ hf(x_1 + h)$$

sind geordnet nach zu- oder abnehmendem Größenverhältnis. Dasselbe ist noch der Fall für die Quotienten, wenn man durch h dividiert, d. h. für die Zahlen

$$f(x_1),\ \frac{f(x_1 + h) - g(x_1)}{h},\ f(x_1 + h).$$

Nähert sich h der Null, so nähert $f(x_1 + h)$ sich unaufhörlich dem Werte $f(x_1)$, da die Funktion $f(x)$ stetig ist. Dasselbe ist der Fall für die Größe

$$\frac{g(x_1 + h) - g(x_1)}{h},$$

welche immer zwischen $f(x_1)$ und $f(x_1 + h)$ liegt. Mit andern Worten: Diese Größe hat als Grenzwert $f(x_1)$, wenn $h = 0$ wird, oder (Nr. 276) der Wert der Ableitung der Funktion $g(x)$ für $x = x_1$ ist $f(x_1)$.

Wir können also sagen: Die Ableitung der Funktion $g(x)$, welche mittelst der Abszisse den Wert der Fläche $P_0 P M M_0$ ausdrückt, ist gleich der Funktion $f(x)$, welche die Ordinate eines Punktes der Kurve vermöge seiner Abszisse darstellt.

Nehmen wir an, man habe eine Funktion $F(x)$ bestimmt (Nr. 287), welche $f(x)$ als Ableitung hat. Die Funktion $g(x)$, welche in den oben festgesetzten Grenzen für alle Werte von x dieselbe Ableitung hat wie die Funktion $F(x)$, kann sich nur durch eine Konstante C von dieser unterscheiden. Mit anderen Worten:

$$g(x) = F(x) + C.$$

Diese Konstante kann man bestimmen, indem man daran erinnert, daß für $x = x_0$ die Funktion $g(x)$ Null sein muß. Man hat also:

$$F(x_0) + C = 0 \quad C = -F(x_0)$$

und schließlich

$$g(x) = F(x) - F(x_0).$$

Man gelangt also zu folgender Regel: Um den Wert einer Fläche zu erhalten, welche zwischen einer Kurve, der x-Achse und zweien, den Abszissen x_0 und $x_1 > x_0$ entsprechenden Parallelen zur y-Achse liegt, bestimmt man zuerst die *primitive Funktion* von $f(x)$. Ist $F(x)$ diese primitive Funktion, so ist der gesuchte Wert der Fläche gleich der Differenz $F(x_1) - F(x_0)$ der Werte, welche diese Funktion $F(x)$ für $x = x_1$ und $x = x_0$ annimmt.

In den vorausgehenden Überlegungen nahmen wir $x_1 > x_0$ an. Ist x_1 kleiner als x_0, so zeigt das Resultat, welches man erhält, indem man x_0 gegen x_1 und umgekehrt vertauscht, daß die Fläche $P_1P_0MM_1$ alsdann gleich $F(x_0) - F(x_1)$ ist. Wir können jedoch ruhig dieselbe Formel $F(x_1) - F(x_0)$ beibehalten, wenn wir uns darüber einigen, die Werte der Flächen, welche *links* von der Anfangslinie P_0M_0, von wo aus man die Werte dieser Flächen zählt, als negativ zu betrachten. Die Formel $g(x) = F(x) - F(x_0)$ gibt uns immer, wenn wir dieses Übereinkommen treffen, den Wert der Fläche P_0PMM_0, ob der Punkt P, mit der Abszisse x, rechts oder links vom Punkt P_0 mit der Abszisse x_0 liegt, und man kann mithin sagen, daß die Ableitung der Funktion $g(x)$ stets gleich $f(x)$ ist.

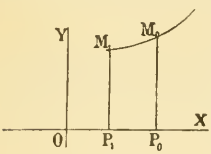


Fig. 152 bis.

298. Betrachten wir z. B. die Fläche OPM, welche von der x-Achse, der Parallelen PM zur y-Achse, deren Punkte alle als Abszisse $OP = a$ haben, und der Geraden OM, welche durch den Nullpunkt geht, eingeschlossen wird. Wir nehmen an, die Gleichung dieser Geraden sei $y = mx$, und der Richtungskoeffizient m positiv. Die Funktion $\frac{mx^2}{2}$ hat als Ableitung mx; es ist dies die primitive Funktion der vor-

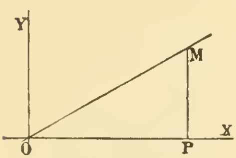


Fig. 153.

hergehenden Nummer. Man muß die Differenz der Werte suchen, welche diese Funktion für $x = a$ und $x = o$ annimmt. Diese Differenz $\frac{ma^2}{2}$ gibt die Fläche des Dreiecks OPM. Bezeichnet man mit b die Ordinate $\overline{PM}$ des Punktes M, so erhält man $m = \frac{b}{a}$ (Nr. 238), und folglich

$$\frac{ma^2}{2} = \frac{b}{a} \times \frac{a^2}{2} = \frac{ab}{2},$$

die bekannte klassische Formel.

299. Betrachten wir jetzt, wie in Nr. 297, die Fläche, welche zwischen der x-Achse, der Ordinate AA' (deren Punkte sämtlich als Abszisse a haben) und der Parabel von der Gleichung

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

liegt. Die Funktion $\frac{x^3}{6p}$ hat als Ableitung $\frac{x^3}{2p}$. Man braucht nur mehr die Differenz der Werte zu nehmen, welche diese Funktion für $x = a$ und $x = 0$ annimmt; diese Differenz $\frac{a^3}{6p}$ oder $\frac{ab}{3}$, wenn wir durch b die Ordinate des Punktes A darstellen, gibt uns den Wert der gesuchten Fläche.

Eine analoge Fläche, wo die Parabel aber durch eine Kurve der Gleichung $y = x^3$ (Nr. 252) ersetzt ist, erhält man auf eine ähnliche

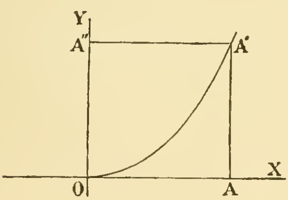


Fig. 154.

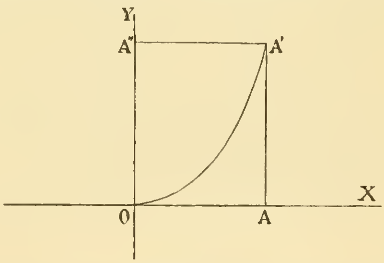


Fig. 154 bis.

Art und Weise, indem man sich daran erinnert, daß die Funktion $\frac{x^4}{4}$ als Ableitung x^3 hat. Die gesuchte Fläche ist

$$\frac{a^4}{4} = \frac{ab}{4},$$

wenn man durch b die Ordinate desjenigen Punktes der Kurve darstellt, welcher a als Abszisse hat.

Betrachten wir jetzt noch die Kurve, welche durch die Gleichung

$$y = \frac{1}{x^2}$$

dargestellt wird. Ich begnüge mich damit, diese Kurve zu zeichnen; dieselbe liegt asymptotisch zu den Achsen. Wir beschäftigen uns mit der Fläche $P_0 P_1 M_1 M_0$ und behalten hierfür die Schreibweise aus Nr. 297 bei. Die Funktion $-\frac{1}{x}$ hat als Ableitung $\frac{1}{x^2}$; die gesuchte Fläche hat also einen Wert

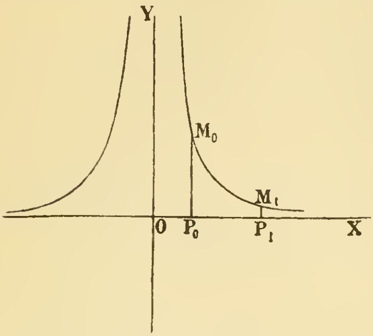


Fig. 155.

$$-\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_0} = \frac{x_1 - x_0}{x_0 x_1}.$$

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, darauf aufmerksam zu machen, daß, wenn x_0 konstant bleibt, x_1 dagegen unaufhörlich zunimmt, der Ausdruck

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}$$

sich unaufhörlich $\frac{1}{x_0}$ nähert. Die Fläche $P_0 P_1 M_1 M_0$ nimmt also nicht unaufhörlich zu, sondern nähert sich immer mehr einem bestimmten Grenzwerte. Man sieht sich also gezwungen, dem Werte der Fläche, welche zwischen der x-Achse, der Kurve und der Ordinate $P_0 M_0$ liegt und unbestimmt zu sein scheint, einen Sinn beizulegen. Dies tut man, indem man sagt, dieser Grenzwert $\frac{1}{x_0}$ messe eben die Größe dieser Fläche. Bleibt dagegen umgekehrt x_1 unveränderlich und neigt x_0 zu 0 hin, so nimmt

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}$$

beständig zu. Die Fläche $P_0 P_1 M_1 M_0$ nimmt immer mehr zu, je näher die Ordinate $P_0 M_0$ an die x-Achse heranrückt. Die beiden Asymptoten zeigen also ein ganz verschiedenes Verhalten.

300. Durch die vorausgehende Methode läßt sich die Berechnung einer Fläche auf das Auffinden einer primitiven Funktion zurückführen. Das Suchen einer Tangente dagegen (Nr. 276) kommt auf das Aufsuchen einer Ableitung heraus. *Beide Probleme verhalten sich umgekehrt zueinander.*

Die Entdeckung des engen und ganz verborgenen Zusammenhanges dieser beiden Probleme bedeutete einen entscheidenden Schritt in der Entwicklung der Mathematik.

Schon die Alten wußten Tangenten und Flächen zu berechnen, wußten also im Grunde genommen Ableitungen und primitive Funktionen zu finden. Das Band aber, das diese beiden Probleme so eng miteinander verknüpft, blieb unbekannt bis zur Entdeckung der Differential- und Integralrechnung. Das Problem der Flächenberechnung schien wesentlich darin zu bestehen, den Grenzwert einer gewissen Summe aufzusuchen. An den Beispielen, welche wir in Nr. 295, 296 behandelt haben, läßt sich dies leicht erkennen.

Andererseits sind heute die Regeln zur Berechnung der Ableitungen oder der primitiven Funktionen von vorgegebenen Funktionen systematisch entwickelt worden, während sie früher nur aus einer Reihenfolge scharfsinniger Vorschriften bestanden, die bloß auf Spezialfälle anwendbar waren.

Später stellten andere Probleme sich ein, welche entstanden waren durch die Unmöglichkeit, gewisse primitive Funktionen mittels bekannter Funktionen darzustellen. Ist $f(x)$ eine gegebene Funktion, so ist die Fläche der Kurve, welche der Gleichung $y = f(x)$ entspricht und die von der festen Ordinate $P_0 M_0$ aus beginnt, eine vollständig bestimmte Funktion von x. Man könnte sie (theoretisch) für jeden Wert von x berechnen, und dies mit Hilfe der zu Anfang dieses Kapitels erklärten Verfahren. Ist es unmöglich, sie mittels bekannter Funktionen auszudrücken, so kann man jedoch ein beliebiges Symbol wählen, um sie darzustellen, und man sucht alsdann ihre Eigenschaften zu studieren, indem man von dem Standpunkte ausgeht, daß die Ableitung dieser Funktion $f(x)$ sein muß. Auf diese Weise schafft man eine neue Funktion.

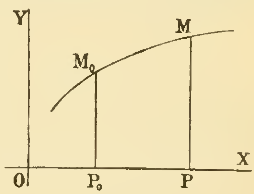


Fig. 155 bis.

301. Die Logarithmen und die Exponentialfunktion. Ich will hier ein Beispiel einer solchen Schöpfung geben.*)

Betrachten wir die gleichseitige Hyperbel (Nr. 251), deren Gleichung

*) J. M. Bradshaw hat in der Januar-Nummer 1903 der Annals of Mathematics die Eigenschaften der Logarithmen und der Exponentialfunktion behandelt, und zwar von fast dem nämlichen Standpunkte aus, wie dies hier geschieht.

$$y = \frac{1}{x}$$

ist, oder betrachten wir vielmehr nur denjenigen Teil dieser Hyperbel, der in dem Winkel der positiven Koordinaten liegt.

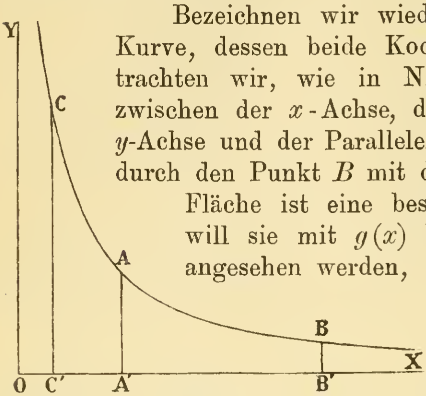


Fig. 156.

Bezeichnen wir wieder mit A denjenigen Punkt der Kurve, dessen beide Koordinaten gleich 1 sind, und betrachten wir, wie in Nr. 297, die Fläche, welche liegt zwischen der x-Achse, der Kurve, der Parallelen AA' zur y-Achse und der Parallelen zu derselben Achse, welche man durch den Punkt B mit der Abszisse x ziehen kann. Diese Fläche ist eine bestimmte Funktion von x und ich will sie mit $g(x)$ bezeichnen. Sie muß als positiv angesehen werden, wenn die Abszisse x des Punktes B größer als 1 ist. Dies ist z. B. für unsere Figur der Fall. Negativ dagegen ist sie, wenn diese Abszisse zwar positiv, aber kleiner als 1 ist. Es träfe dies für die Fläche zu, welche links durch die Gerade CC' abgegrenzt wird. Die Funktion $g(x)$ hat keinen Sinn für negative Werte von x.

Gemäß ihrer Definition ist die Funktion (x) stetig. Ihre Ableitung $g'(x)$ ist gleich $\frac{1}{x}$. Die Funktion $g(x)$ nimmt immer an Wert zu, und zwar von 0 an, wenn x von 1 bis $+\infty$ wächst. Würde x von 1 bis 0 ändern, so wäre die Funktion $g(x)$ negativ und nähme im algebraischen Sinne ab, so daß also schließlich die Funktion $g(x)$ beständig zunimmt, wenn x von 0 bis $+\infty$ wächst.

a möge eine beliebige positive Zahl sein. Betrachten wir alsdann die Funktion $g(ax)$, welche man erhält, indem man in $g(x)$ x durch ax ersetzt, und suchen wir den Wert ihrer Ableitung für $x = x_0$. Hierfür muß man zwei benachbarte Werte x_0, $x_0 + h$ der Variablen betrachten und untersuchen, welchem Grenzwerte das Differenzenverhältnis

$$\frac{g(ax_0 + ah) - g(ax_0)}{h}$$

sich nähert, wenn $h = 0$ wird. Setzen wir für einen Augenblick

$$ax_0 = z_0, \quad ah = k, \quad h = \frac{k}{a};$$

das Verhältnis, dessen Grenzwert man berechnen soll, läßt sich dann unter folgender Form schreiben:

$$\frac{g(z_0+k)-g(z_0)}{\left(\frac{k}{a}\right)} = a\,\frac{g(z_0+k)-g(z_0)}{k}.$$

Nähert sich h dem Werte 0, so wird k gleichfalls 0, und augenscheinlich hat der Faktor

$$\frac{g(z_0+k)-g(z_0)}{k},$$

welcher auf der zweiten Seite steht, als Grenze den Wert $\frac{1}{z_0}$ der Ableitung der Funktion $g(z)$ für $z=z_0$. Das Produkt dieses Faktors mit a hat alsdann als Grenzwert $\frac{a}{z_0}=\frac{a}{ax_0}=\frac{1}{x_0}$.

Die Funktion $g(ax)$ hat also $\frac{1}{x}$ als Ableitung. Ihre Ableitung ist dieselbe wie die der Funktion $g(x)$. Die beiden Funktionen $g(ax)$ und $g(x)$ unterscheiden sich nur durch eine Konstante C. Mit anderen Worten, es besteht zwischen beiden die Relation

$$g(ax)-g(x)=C.$$

Nun wird aber für $x=1$ die Funktion $g(x)$ Null, die Funktion $g(ax)$ dagegen nimmt den Wert $g(a)$ an, und man erhält $C=g(a)$ oder

$$g(ax)-g(x)=g(a),$$

und diese Relation ist richtig, welches auch immer die positiven Zahlen x und a sein mögen. Diese Relation läßt sich auch noch folgendermaßen schreiben:

$$g(ax)=g(a)+g(x).$$

Die Funktion $g(x)$, die sich auf eine so natürliche Art und Weise einführen läßt, und deren Herstellung man zu Anfang der Integralrechnung gewissermaßen nicht vernachlässigen kann, um eine Funktion mit der Ableitung $\frac{1}{x}$ zu haben, ist das, was man unter *natürlichem Logarithmus* (oder Neperschem Log.) einer Zahl x versteht. Man stellt sie gewöhnlich durch das Symbol $\log x$ dar. Ich habe eben die Haupteigenschaft dieser Funktion hervorgehoben, nämlich, daß der Logarithmus des Produktes zweier positiver Zahlen der Summe der Logarithmen dieser beiden Zahlen gleich ist. Da ferner der Dividend gleich dem Produkt des Divisors und des Quotienten ist, sieht man sofort ein, daß der Logarithmus des Quotienten zweier (positiven) Zahlen gleich der Differenz zwischen dem Logarithmus des Dividenden und dem Logarithmus des Divisors ist. Als Spezialfall kann man anführen, daß der Logarithmus von $\frac{1}{x}$ gleich der Differenz $\log 1 - \log x$ oder gleich $-\log x$ ist, da ja $\log 1 = 0$ wird, wie dies sofort aus der Definition der Funktion $g(x)$ hervorgeht.

Es ist klar, daß der Logarithmus des Produktes beliebig vieler (positiver) Zahlen a, b, c gleich der Summe der Logarithmen dieser Zahlen ist. Betrachtet man z. B. drei Zahlen $a, b, c,$ so kann ihr Produkt als Produkt der beiden Faktoren ab und c angesehen werden. Für diesen Fall jedoch erhält man die Relation

$$\log(abc) = \log[(ab)c] = \log(ab) + \log c$$
$$= \log a + \log b + \log c.$$

Der Satz erstreckt sich auf diese Weise auf $4, 5, \ldots, n$ Zahlen.

Betrachtet man n Zahlen, welche alle den Wert a haben, so ist der Logarithmus des Produktes a^n dieser n Zahlen, augenscheinlich gleich n mal dem Logarithmus von a. Anders ausgedrückt besteht hier die Relation

$$\log a^n = n \log a.$$

Hieraus erfolgt umgekehrt, daß der Logarithmus der n^{ten} Wurzel von A, d. h. der Zahl a, deren n^{te} Potenz A ist, gleich dem Quotienten ist, den man erhält, wenn man den Logarithmus von A durch n dividiert.

Ist a eine Zahl, die größer als 1 ist, so ist ihr Logarithmus positiv, und die Gleichheit $a^n = n \log a$ zeigt, daß $\log a^n$ mit unaufhörlich wachsendem n stets zunimmt. Nimmt also x immer zu, so nimmt auch die Fläche der Hyperbel, die wir oben bestimmt haben, unaufhörlich zu. In Nr. 299 haben wir gesehen, daß dieser Umstand nicht notwendigerweise daher erfolgt, daß die Kurve asymptotisch zur x-Achse verläuft. Hat x positiven Wert und neigt immer mehr zu 0 hin, so nähert sich $\log x$ dem Werte $-\infty$. Es besteht nämlich die Relation

$$\log x = -\log\frac{1}{x};$$

neigt nun x zu 0 hin, so nimmt auch $\frac{1}{x}$ und folglich auch $\log\left(\frac{1}{x}\right)$ immer mehr zu.

Diese Erörterungen genügen, um über den Verlauf der Kurve, welche (für positive Werte von x) durch die Gleichung

$$y = \log x$$

dargestellt wird, Aufschluß zu erteilen. Wächst x von 0 bis zum Werte $+\infty$, so nimmt die Funktion $\log x$ beständig zu und ändert von $-\infty$ bis $+\infty$. Sie nimmt den Wert 0 an für $x = 1$. Schon die Form dieser Kurve, deren Ordinate immer größer wird (Fig. 157), zeigt, daß jedem Werte $\overline{OB}$ von y ein Punkt M der Kurve entspricht und nur ein einziger. Man erhält diesen Punkt, indem man durch den Punkt B, dessen Ordinate den gegebenen numerischen Wert hat, eine Parallele zur x-Achse zieht bis zum Schnittpunkte mit der Kurve. Diese Gerade begegnet die Kurve nur in einem einzigen Punkte. Wäre die nebenan stehende Figur auf eine Art ideales Millimeterpapier gezeichnet, so würde sie erlauben, bei gegebenem x den Wert von y zu bestimmen, oder bei gegebenem y den Wert von x zu finden. Je nach Belieben definiert diese Kurve y als Funktion von x, oder x als Funktion von y. An der Kurve sieht man sogleich, daß x von 0 bis 1 und dann von 1 bis $+\infty$ wächst, wenn y zuerst von $-\infty$ bis 0 und dann von 0 bis $+\infty$ wächst. Diese Funktion x von y, welche durch die Kurve oder durch die Gleichung

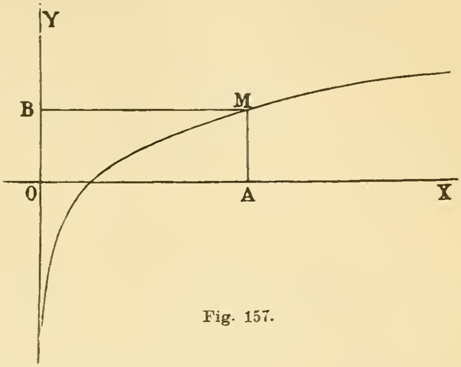


Fig. 157.

$$y = \log x$$

definiert wird, heißt *Exponentialfunktion.*

Vorläufig will ich sie durch das Symbol $E(y)$ darstellen. Schreibt man nun

$$x = E(y),$$

so will man damit nur sagen, y sei der Logarithmus der Zahl x. Die Funktion $E(y)$ ist augenscheinlich stetig.

y_0 und y_1 mögen zwei beliebige Zahlen sein und x_0, x_1 die positiven Zahlen, deren Logarithmen sie darstellen. Es bestehen also zwischen beiden die Beziehungen

$$y_0 = \log x_0, \quad y_1 = \log x_1$$

oder, auf eine andere Art und Weise ausgedrückt:

$$x_0 = E(y_0), \quad x_1 = E(y_1).$$

Hieraus erhält man

$$\log (x_0 x_1) = \log x_0 + \log x_1 = y_0 + y_1.$$

Mit anderen Worten: die Zahl $x_0 x_1$, Produkt der beiden Zahlen $E(y_0)$, $E(y_1)$ hat als Logarithmus $y_0 + y_1$, ist also gleich $E(y_0 + y_1)$, so daß man setzen kann

$$E(y_0)\,E(y_1) = E(y_0 + y_1).$$

Diese Gleichheit drückt die Haupteigenschaft der Exponentialfunktion aus, eine Eigenschaft, welche der Fundamentaleigenschaft der Logarithmen entspricht. Selbstverständlich erstreckt diese Eigenschaft sich auf eine beliebige Anzahl Faktoren, und welches auch die n Zahlen a, b, $c, \ldots l$ seien, so kann man immer setzen

$$E(a)\,E(b) \cdots E(l) = E(a + b + c + \cdots + l).$$

Nimmt man an, alle diese Zahlen $a, b, c, \ldots, l$ seien gleich 1, so erhält diese Gleichheit die Form:

$$[E(1)]^n = E(n).$$

Ist also n eine natürliche ganze Zahl, so ist die Funktion $E(n)$ die n-te Potenz von $E(1)$, d. h. die n-te Potenz derjenigen Zahl, deren Logarithmus 1 ist, oder, wenn man will, die n-te Potenz der Abszisse desjenigen Punktes B der gleichzeitigen Hyperbel, dem eine 1 qcm große Fläche $A'ABB$, entspricht, wenn man das Zentimeter als Längeneinheit gewählt hat. Die Zahl $E(1)$ wird gewöhnlich durch e dargestellt. Man hat ihren Wert mit einer sehr großen Annäherung berechnet und gefunden, daß er gleich

$$2{,}718281828459045 \ldots$$

ist. Stellt also y eine natürliche ganze Zahl dar, so erhält man

$$E(y) = e^y,$$

und nur in diesem Falle hat das zweite Glied einen Sinn.

Es ist gebräuchlich, immer durch e^y die Funktion von y darzustellen, die wir bis jetzt mit $E(y)$ bezeichnet haben.

Die Ableitung der Funktion $E(y)$ oder e^y läßt sich leicht finden. Betrachtet man nämlich zwei benachbarte Werte y_0 und $y_0 + k$ der Variablen y, so geben diese Werte uns die Logarithmen zweier benachbarter Zahlen x_0 und $x_0 + h$, und es bestehen die Beziehungen

$$y_0 = \log x_0, \quad y_0 + k = \log (x_0 + h)$$

oder

$$x_0 = E(y_0), \quad x_0 + h = E(y_0 + k);$$

und folglich

$$\frac{h}{k} = \frac{E(y_0 + k) - E(y_0)}{k} = \frac{h}{\log (x_0 + h) - \log x_0}.$$

Nähert eine der beiden Zahlen h, k sich dem Werte 0, so trifft dies auch bei der anderen zu. Unter diesen Umständen ist die rechte Seite der vorhergehenden Gleichheit der umgekehrte Wert von

$$\frac{\log (x_0 + h) - \log x_0}{h}.$$

Diese letztere aber hat, wie wir gefunden, $\frac{1}{x_0}$ als Grenzwert. Das Verhältnis

$$\frac{E(y_0 + k) - E(y_0)}{h}$$

nähert sich also unaufhörlich dem Ausdruck

$$x_0 = E(y_0),$$

wenn k sich der Null nähert. Mit anderen Worten, die Ableitung von e^y ist die Funktion e^y selbst.

Ich habe kaum nötig, darauf aufmerksam zu machen, daß ich nur einzig und allein der Bequemlichkeit der Erklärungen wegen, bei dem Studium der Funktion e^y, die Variable y genannt habe. Nichts kann mich daran hindern, die Zahl, deren Logarithmus x ist, e^x zu nennen. Die Funktion e^x, welche immer positiv ist, wächst von 0 bis $+\infty$, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ ändert. Für $x = 0$ wird sie gleich 1. Sie besitzt ferner die Eigenschaften, welche durch die Beziehungen

$$e^x \times e^y = e^{x+y}, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

ausgedrückt werden.

Der Umstand, daß die Funktion $\log x$ als Ableitung $\frac{1}{x}$ hat, d. h. daß das Verhältnis

$$\frac{\log(x + h) - \log x}{h}$$

für einen unveränderlichen Wert von x und für einen Wert 0 von h, sich unaufhörlich dem Grenzwerte $\frac{1}{x}$ nähert, gibt noch zu folgender Bemerkung Anlaß. Der Zähler des vorhergehenden Verhältnisses läßt sich noch schreiben: $\log\left(\frac{x+h}{x}\right)$ oder $\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$. Ersetzt man x durch $\frac{1}{a}$ und h durch $\frac{1}{n}$, und nimmt man an, n wachse unaufhörlich um ganze positive Werte, so sieht man, daß der Ausdruck

$$n \log\left(1 + \frac{a}{n}\right) = \log\left[\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n\right]$$

dem Werte $\frac{1}{x}$ oder a sehr nahe kommen muß, wenn n sehr groß wird. Man kann also schreiben, daß

$$\log\left[\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n\right] = a + \alpha;$$

α kann beliebig klein sein, wenn nur n groß genug ist. Hieraus schließt man, daß

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^{a+\alpha}.$$

Wächst n immer mehr, so nähert α sich dem Werte 0, und die ganze Seite kommt dem Werte e^a beständig näher. Dasselbe trifft für die erste Seite zu. Wächst also n beständig um ganze positive Werte, so nähert $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ sich unaufhörlich dem Werte e^a. Die Haupteigenschaft der Logarithmen ist von sehr großem Nutzen für das numerische Rechnen. Hat man z. B. eine Tabelle, welche erlaubt, den Logarithmus einer gegebenen Zahl, oder die einem gegebenen Logarithmus entsprechende Zahl zu finden, so kann man, um z. B. das Produkt zweier Zahlen auszurechnen, die Logarithmen dieser beiden Zahlen aufsuchen, sie addieren und dann die Zahl aufsuchen, deren Logarithmus eben diese Summe ist. Diese Zahl ist das gesuchte Produkt. Die Multiplikation wird also durch eine Addition ersetzt; in ebendemselben Sinne kann man sagen, die Division werde durch eine Subtraktion ersetzt, und das Ausziehen einer Wurzel durch eine Division.

Die natürlichen Logarithmen sind jedoch nicht die bequemsten bei dieser Rechnung.

Man behält den Namen Logarithmus bei für das Produkt der Funktion $\log x$, die wir früher definiert haben, mit einer beliebigen Konstanten M. Jeder Wert der Konstanten M charakterisiert ein System von Logarithmen. Es ist klar, daß die Haupteigenschaft für diese neuen Logarithmen bestehen bleibt; auch die aus dieser Haupteigenschaft abgeleiteten Eigenschaften bleiben bestehen; der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren. Man nennt Grundzahl eines Logarithmensystems die Zahl, deren Logarithmus in diesem System 1 ist. Die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist die oben definierte Zahl e. Ist die Grundzahl 10, so heißen die Logarithmen *gemeine Logarithmen.* Behält man die vorhergehende Schreibweise bei, so sieht man, daß die Zahl M, womit man den natürlichen Logarithmus von x multiplizieren muß, um den gewöhnlichen zu erhalten, durch die Relation

$$M \log 10 = 1$$

bestimmt wird. Der Wert von M ist

$$M = 0{,}4342944819\ldots$$

Die gewöhnlichen Logarithmen der Zahlen 100, 1000, 10000,..., sind 2, 3, 4, ..., da 100, 1000, 10000 die Produkte von 2, 3, 4, ... Faktoren sind, die alle gleich 10 sind. Eben diese Eigenschaft macht die Anwendung der natürlichen Logarithmen besonders bequem Das Vorausgehende genügt, um die Instruktionen zu verstehen, welche zu Anfang der meisten Logarithmentafeln stehen und gleichsam als Gebrauchsanweisung dienen.

Alle Erörterungen, die in dieser Nummer enthalten sind, gehen aus der folgenden Frage hervor: welches sind die Eigenschaften der Funktion, welche $\frac{1}{x}$ als Ableitung hat? Schon der augenscheinliche Reichtum an Erörterungen läßt den Leser mutmaßen, daß es in diesem Gedankengange ein unbegrenztes Feld von Reichtümern gibt. Es wäre nicht schwierig gewesen, nachzuweisen, wie die in Nr. 261 definierten Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ sich zu Anfang der Integralrechnung eingestellt hätten, wenn sie vorher nicht aus der Geometrie her bekannt gewesen wären; die Feststellung einiger ihrer Haupteigenschaften wäre auch sehr leicht gewesen.

§ 3. Volumen.

302. In Nr. 290 habe ich versucht, einen Begriff zu geben von dem, was man allgemein *Volumen* nennt. Andererseits habe ich in den Nr. 161—162 nachgewiesen, wie man in der Elementar-Geometrie zum Ausdruck des Volumens eines geraden Prismas gelangt. Die gefundene Regel erstreckt sich natürlich auf den geraden Zylinder, da dieser nur einen Spezialfall des Prismas bildet.

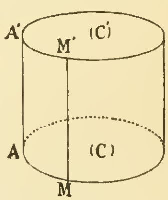


Fig. 158.

Betrachten wir im Raume eine Ebene (H), die der Leser sich horizontal liegend denken mag, und in diese Ebene denken wir uns einen geschlossenen Umriß (C). In einem Punkte dieses Umrisses errichten wir ein Lot auf der Ebene (H); wir bleiben immer auf derselben Seite der Ebene und trennen auf diesem Lot, vom Punkte M aus, eine konstante Länge MM' ab, und wir nehmen nun an, der Punkt M beschreibe die Kurve (C). Der geometrische Ort des Punktes M' ist eine Kurve (C'); diese ist der Kurve (C) gleich und liegt in einer Ebene (H'), welche parallel zur Ebene (H) verläuft. Die Kurve (C') ist nichts anderes als die Kurve (C), die man um eine gewisse Strecke verschoben hat (Nr. 166), und zwar in senkrechter Richtung zur Ebene (H). Wenn der Punkt M die Kurve beschreibt, so beschreibt die Gerade MM' eine krumme Fläche, *Zylinderfläche* genannt, die der Leser sich leicht vorstellen kann. Das Volumen, das von dieser Fläche und von den beiden durch die Kurven (C) und (C') begrenzten Teilen der Ebene (H) und (H') im Raume begrenzt wird, ist ein gerader *Zylinder*. Wäre die Kurve (C) durch ein Vieleck ersetzt, so hätte man ein gerades *Prisma*. Die konstante Entfernung der beiden parallelen Ebenen (H) und (H') ist gleich MM'; dies ist die *Höhe* des Zylinders.

Wir bemerken sogleich, daß ein schiefer Zylinder sich auf dieselbe Art und Weise definieren läßt. Die Gerade jedoch, anstatt senkrecht auf der Ebene (H), welche die Kurve (C) enthält, zu stehen, würde in diesem Falle zwar ihre konstante Länge behalten, aber sie müßte parallel zu einer festen Geraden verlaufen, die nicht mehr senkrecht auf der Ebene (H) steht.

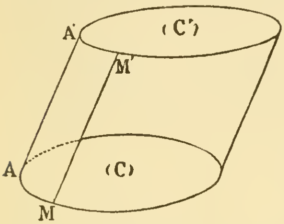


Fig. 159.

Natürlich darf diese Gerade nicht parallel zu Ebene (H) gedacht werden, da sonst alle Geraden MM' in dieser Ebene sich befänden und man folglich kein Volumen mehr erhielte.

Die Höhe des schiefen Zylinders ist immer der Abstand der beiden Ebenen (H), (H'), welche die Kurven (C) und (C') enthalten. Die Kurve (C') ist übrigens nichts anderes als die Kurve (C), welche man längs einer Seitenlinie um die Länge MM' verschoben hat. Die Höhe ist diesmal nicht mehr der Seite MM' gleich.

Die ebenen Flächen, welche von den Kurven (C), (C') begrenzt werden, sind die *Grundflächen* des Zylinders.

303. Behandeln wir den geraden Zylinder. Wir nehmen an, die Ebene (H) sei in ganz kleine Quadrate eingeteilt. Die Summe $\sum$ der Maße der innerhalb (C) liegenden Quadrate stellt mit einer gewissen Annäherung das Maß der Grundfläche S des Zylinders dar. Diese Annäherung können wir als beliebig groß ansehen, vorausgesetzt, daß unsere Einteilung in Quadrate fein genug sei. Betrachten wir jedes dieser kleinen Quadrate als Grundfläche eines geraden Parallelepipedons, dessen Höhe gleich der Höhe h des Zylinders wäre. Alle diese Parallelepipeda zusammen bilden ein Prisma, welches den Zylinder beinahe füllt. Das Volumen des Prismas, das $\sum \times h$ als Maß hat, ist beliebig wenig von dem des Zylinders verschieden; die Differenz ist nämlich geringer als die Summe der rechtwinkeligen Parallelepipeda, welche gleiche Höhe haben und als Grundfläche die kleinen Quadrate, durch welche die Kurve (C) läuft. Übrigens ist die Differenz der Produkte $\sum \times h$ und $S \times h$ beliebig klein. Das letztere dieser Produkte, welches konstant ist und von der Einteilung der Grundfläche unabhängig ist, unterscheidet sich also beliebig wenig von dem Maß des Zylinders. Es kann unmöglich ein Unterschied zwischen beiden bestehen.

Das Volumen eines geraden Zylinders wird durch das Produkt der Maße seiner Grundfläche und seiner Höhe gemessen. Diese Regel setzt jedoch voraus, daß man als Flächeneinheit das Quadrat der Längeneinheit ansieht, und als Volumeneinheit den Würfel, der die Längeneinheit als Kante hat.

Derjenige Leser, welcher diesen Teil der elementaren Geometrie studiert hat, erinnert sich gewiß daran, daß das Maß des schiefen Prismas und besonders der Pyramide sich nur mittels Kunstgriffen aus dem des geraden Prismas ableiten läßt. Diese Kunstgriffe sind zwar scharfsinnig, aber wenig natürlich. Die Regeln, die man erhält, lassen sich dagegen sehr leicht aus einer allgemeinen Bemerkung ableiten, bei welcher ich einen Augenblick verweilen will.

304. Betrachten wir einen Körper (V), der durch eine Fläche (S) begrenzt wird. Der Einfachheit halber nehme ich an, der Körper bestehe aus einem einzigen Stück und weise keine Lücken im Innern auf. Nehmen wir an, eine Ebene verändere ihre Stellung im Raume, bleibe aber immer horizontal.*) Sie befinde sich z. B. anfangs unter dem Körper (V) und möge allmählich steigen. Sie erreicht schließlich diesen Körper (V), schneidet ihn aber noch nicht. (H) sei diese Stellung. Steigt die Ebene immer höher, so schneidet sie den Körper (V). Fährt sie fort zu steigen, so wird sie eine Stellung (K) erreichen, wo sie den Körper (V) nur mehr berührt und dieser ganz unter ihr liegt. Oberhalb dieser Ebene (K) liegt kein Teil des Körpers (V) mehr. Derselbe liegt ganz zwischen den parallelen Ebenen (H) und (K). Auf diese Art und Weise liegt ein Zylinder ganz zwischen den Ebenen seiner Grundflächen eingeschlossen.

Dies vorausgeschickt, denke man sich den Körper (V) durch Ebenen, welche den äußersten Ebenen (H) und (K) gleichlaufen, in ganz dünne Scheiben eingeteilt. Es ist dies eine Operation, welche häufig von den Naturforschern vorgenommen wird, wenn diese dünne Schnitte haben wollen. Legt man diese Scheiben richtig aufeinander, so bilden sie den Körper (V): er ist nur die Summe dieser Teile. Die Maßzahl V des Volumens des Körpers (V) ist die Summe der Maßzahlen dieser Scheiben, die alle ganz klein sind. Nun denke man

*) Diese Annahme ist nicht durchaus notwendig; es genügt anzunehmen, die Ebene ändere ihre Stellung, bleibe sich aber immer parallel.

sich, diese Scheiben blieben aufeinander liegen, nur würden sie ein wenig aufeinander verschoben, so daß sie den Körper (V') bilden, der durch eine neue Fläche (S') begrenzt wird. Das Volumen V' dieses Körpers (V'), welcher augenscheinlich zwischen denselben äußersten Ebenen (H) und (K) liegt wie der Körper (V), ist die Summe derselben Scheiben wie dieses letzte Volumen. Die Volumina V und V' sind inhaltgleich. Sie müssen also durch dieselbe Zahl gemessen werden. Der Leser sieht sofort die Wahrheit folgenden Lehrsatzes ein:

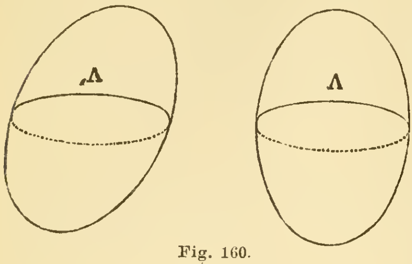


Fig. 160.

Zwei Körper (V), (V_0), welche zwischen zwei parallelen Ebenen (H), (K) eingeschlossen sind und durch die Flächen (S), (S_0) begrenzt werden, haben gleiches Volumen, wenn jede Ebene, welche parallel zu den Ebenen (H), (K) liegt, die beiden Flächen (S), (S_0) längs zwei gleichen Kurven schneidet (die einander decken können).

Man kann nämlich den Körper (V) durch Ebenen, welche parallel zur Ebene (H) laufen, in Scheiben zerlegen, die genügend dünn sind. Diese Scheiben verschiebt man auf passende Art und Weise aufeinander und gelangt schließlich zum Körper (V_0).

Dies ist jedoch nicht ganz richtig, sondern scheint nur richtig, weil man die Dicke der Scheiben sowie besonders die ganz kleine Fläche, welche sie an den Seiten begrenzt, außer acht läßt. Nach der Verschiebung nehmen diese kleinen Flächen (die *Ränder* der Scheiben) nicht genau die Form der Fläche (S_0) an, und der schiefe Körper (V) deckt sich nicht genau mit dem Körper (V_0). Nimmt der Leser z. B. an, der Körper (V) sei ein gerades dreiseitiges Prisma, so sind die Teilchen von vorhin, welche von Schnitten herrühren, die man parallel zur Grundfläche gemacht hat, in Wirklichkeit kleine dreiseitige Prismen. Verschiebt man diese kleinen Prismen aufeinander, so bildet man gewissermaßen ein schiefes dreiseitiges Prisma, das dieselbe Höhe hat wie das erste gerade Prisma, aber dessen Mantel nicht mehr eben ist, sondern eine Art Treppe mit ganz schmalen Stufen darstellt.

305. Obgleich aber diese Beweisführung unvollkommen ist, ist der ausgesprochene Satz dennoch deshalb nicht minder richtig. Betrachten wir übrigens diese Beweisführung etwas näher, so erlangen wir eine wichtige Verallgemeinerung des Satzes.

Kommen wir auf den Körper (V) mit der Oberfläche (S) zurück, und nehmen wir an, er sei wieder in kleine, flache Scheiben zerlegt. Betrachten wir alsdann eine dieser Scheiben. Weil, wie wir eben gefunden, die Dicke dieser Scheiben sehr gering ist, können wir leicht von der sie begrenzenden Seitenfläche, dem *Rande*, absehen; und ändert man diese Seitenfläche ein wenig, so ist es klar, daß der Inhalt des Teilchens dadurch kaum eine Veränderung erleidet. Nehmen wir an, man ersetze ein solches Teilchen durch ein anderes von gleicher Dicke, das aber einen geraden Zylinder darstellt und zur Grundfläche eine der Schnittflächen der richtigen Scheibe habe. Die zweite Grundfläche wäre natürlich von der zweiten der richtigen Scheibe verschieden. Man ginge vom richtigen Teilchen zum zylinderförmigen über, durch Abziehen oder Hinzufügen eines kleinen Volumens, welches einem *Faden* gliche. Auf diese Weise ersetze man nun alle richtigen Scheiben des Körpers (V) durch zylinderförmige, und man sieht alsdann, daß das Volumen V durch ein Volumen V_1 ersetzt wird, das sehr wenig von V verschieden ist. Durch diese Operation hat man eine ganz dünne Seitenschicht, eine Art *Schale*, vom Volumen (V) weggenommen oder zu demselben hinzugefügt. Die Schale wird durch alle die *Fäden* gebildet, von denen oben gesprochen wurde. Sind die Schnitte dünn genug, so ist dieser hinzugefügte oder abgezogene Teil beliebig klein. Wollte man streng verfahren, so müßte dieser letzte Teil bewiesen werden, und dieser Beweis würde nur eine geringe Schwierigkeit bieten, vorausgesetzt, daß man die Entstehung der Fläche Σ, welche das Volumen V begrenzt, ein wenig näher bestimmte. Diese Beweisführung wollen wir beiseite lassen, dagegen direkt eine andere Bemerkung machen, die wir später brauchen: soll jeder der kleinen geraden Zylinder genau das gleiche Volumen haben wie die Scheibe, deren Stelle er einnimmt, so genügt es, die Grundfläche der Scheibe ein klein wenig zu verändern (größer oder kleiner zu machen; die Höhe bliebe dieselbe). Man kann sogar hinzufügen, daß diese Veränderung beliebig gering ist, falls die Höhe klein genug ist.

Wie dem auch sein mag, mit nur einem geringem Fehler kann der Körper (V), der durch die Fläche S begrenzt wird und zwischen den beiden äußersten parallelen Ebenen (H) und (K) liegt, als die Summe (V_1) einer sehr großen Anzahl gerader Zylinder angesehen werden. Die aufeinander folgenden Grundflächen sind die ebenen Schnitte, die man im Körper (V) durch nahe aneinander liegende Ebenen, die mit (H) und (K) parallel sind, macht. Die respektiven Höhen sind die Abstände zweier aufeinanderfolgender Ebenen. Der Fehler, den man begeht, indem man den Körper V durch V_1 ersetzt, ist beliebig klein, wenn man die gegenseitigen Abstände zweier parallelen Ebenen, d. h. die Höhen der kleinen Zylinder, genügend klein annimmt.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir jetzt einen zweiten Körper (V'), der durch die Fläche (S') begrenzt wird und zwischen den nämlichen äußeren Ebenen (H) und (K) liegt wie der Körper (V). Nehmen wir an, jede Ebene, die parallel zu (H), (K) verläuft, bestimme in den Körpern (V), (V') zwei *äquivalente* Schnitte, d. h. Schnitte, deren Fläche durch ein und dieselbe Zahl gemessen werden: so folgt daraus, daß die beiden Volumen äquivalent sind, d. h. gleiche Maßzahlen haben.

Denn denken wir uns die beiden Körper (V) und (V') in eine gleiche Anzahl dünner Schnitte zerlegt vermittelst Ebenen, die zu (H) und (K) parallel sind, so können wir jeden dieser dünnen Schnitte ersetzen durch einen Zylinder: Die Höhe ist der Abstand der beiden Schnittebenen, die Grundfläche die betreffenden Schnitte, die eine Ebene in den beiden Körpern erzeugt. Da nach unserer Annahme beide Schnitte flächengleich sind, so sind die beiden Zylinder inhaltgleich. Wir können mithin die Körper (V) und (V') ersetzen durch zwei andere Zylinder (V_1) und (V_1'). Sind die Schnitte genügend dünn, so sind (V_1) und (V_1') beliebig wenig von (V) und (V') verschieden. Nun sind aber (V') und (V_1') inhaltgleich (denn sie bestehen beide aus der gleichen Anzahl gleicher Zylinder); sie haben mithin die gleiche Maßzahl, die nach dem oben Gesagten beliebig wenig von den Maßzahlen der Körper (V) und (V') abweicht: Die Maßzahlen von (V) und (V') sind also gleich.

Wir wollen diesen Satz nun an einigen Beispielen erläutern.

306. Als Körper (V) nehmen wir einen Zylinder oder ein senkrechtes Prisma, als Körper (V') einen schiefen Zylinder oder ein schiefes Prisma. Ich nehme an, diese beiden Zylinder hätten gleiche Höhe und äquivalente Grundflächen.

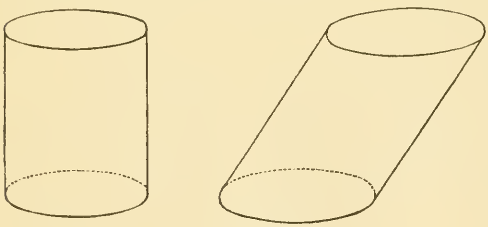


Fig. 161.

Man kann den Zylinder (V') derart stellen, daß seine Grundflächen sich in den Ebenen (H) und (K) der Grundflächen des Zylinders (V) befinden. Schneidet man einen Zylinder durch eine Ebene, die parallel zur Grundfläche ist, so ist es klar, daß der so bestimmte Schnitt, welcher durch eine Verschiebung mit der Grundfläche zur

Deckung gebracht werden kann, gleich dieser Grundfläche ist. Die beiden Schnitte also, welche eine und dieselbe zu den Grundflächen parallele Ebene in den Zylindern (V), (V') erzeugt, sind äquivalent. Die beiden Zylinder sind folglich äquivalent, und der Inhalt des schiefen Zylinders oder Prismas wird gemessen wie der Inhalt des senkrechten Prismas, nämlich durch das Produkt der Maßzahlen von Grundfläche und Höhe.

307. Betrachten wir eine geschlossene, ebene Kurve (C), die in einer Ebene (H) liegt, und einen außerhalb dieser Ebene gelegenen Punkt O; verbinden wir den Punkt O mit einem beliebigen Punkte M der Kurve (C), und lassen wir M diesen Umriß beschreiben, so wird die Gerade OM eine Fläche erzeugen: der Inhalt V, der durch diese Fläche und durch (C) begrenzt wird, heißt *Kegel;* die *Grundfläche* des Kegels ist derjenige Teil der Ebene (H), welcher von der Kurve (C) begrenzt wird. Der Punkt O heißt *Scheitel* (Spitze) des Kegels. Der Abstand des Punktes O von der Ebene (H) der Grundfläche ist die *Höhe* des Kegels. Die krumme Fläche*), welche durch die Gerade OM beschrieben wird, ist der *Mantel* des Kegels. Die Linien OM sind die *Erzeugenden* des Kegels.

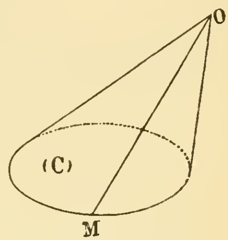


Fig. 162.

*) Ich benutze diese Gelegenheit, um einige Definitionen zu geben, die man kennen muß, um gewisse laufende Ausdrücke zu verstehen. Betrachtet man eine Kurve (C) und einen Punkt O, so ist der Ort der *unbegrenzten* Geraden, welche den Punkt O mit einem veränderlichen Punkte M der Kurve (C) verbindet, eine sogenannte *Kegelfläche* oder auch ein *Kegel.* Das Wort Kegel ist nicht wie im Text als Volumen aufgefaßt, sondern bezeichnet eine *unbegrenzte Fläche.* Der Punkt O heißt immer Scheitel der Kegelfläche oder des Kegels. Die Geraden, welche diese Fläche erzeugen, Erzeugende. Der Kegel heißt *Kreiskegel*, wenn die Kurve (C) ein Kreis ist. Man kann sich leicht einen Kreiskegel vorstellen, indem man sich zwei *Düten* denkt, die mit ihren Spitzen zusammenstehen. Ein Kreiskegel besteht aus zwei *Schalen*, die durch den Scheitel getrennt sind. Eine beliebige Ebene, welche nicht durch den Scheitel geht, schneidet den Kegel längs einer Kurve, die man *Kegelschnitt* nennt. Dieser Kegelschnitt kann drei ganz verschiedene Formen annehmen, je nachdem sie nur eine Schale schneidet und alle Erzeugenden derselben schneidet oder nur eine Schale schneidet und alle Erzeugenden mit Ausnahme einer einzigen, oder endlich beide schneidet. Die im ersten Falle bestimmte Kurve heißt *Ellipse.* Die parallele Ebene, welche man durch den Scheitel legt, läßt die beiden Schalen auf verschiedenen Seiten. Im zweiten Falle heißt die Kurve *Parabel*, und die parallele Ebene, die man durch den Scheitel legt, *berührt* den Keger längs *einer* Erzeugenden. Im dritten Falle heißt die Kurve *Hyperbel*, und die parallele Ebene schneidet den Kegel längst *zweier* Erzeugenden. Die Ellipse hat ovale Form; die Parabel ist die in Nr. 251 betrachtete Kurve; die Hyperbel hat eine ähnliche Form wie die in Nr. 253 studierte *gleichseitige* Hyperbel. Die Asymptoten stehen aber im all-

Ist der Umriß (C) ein ebenes Vieleck, so heißt der Kegel *Pyramide.* Diese Pyramide heißt drei-, vier-, fünfseitig, je nachdem die Grundfläche ein Dreieck, ein Viereck, ein Fünfeck ist.

Als parallele Ebenen, welche den Kegel begrenzen, kann man zuerst die Ebene (H) ansehen und dann die Ebene (K), welche parallel mit der ersteren und durch den Scheitel O gelegt ist. Dies vorausgesetzt, untersuchen wir die Natur eines Schnittes, der durch eine Ebene (H_1) parallel zu (H) bestimmt wird.

Man sieht leicht, daß die Schnittkurve (C_1) homothetisch zur Kurve (C) liegt. Das homothetische Zentrum ist der Punkt O, das Verhältnis k ist $\frac{OA_1}{OA}$, also das Verhältnis der Entfernungen des Punktes O zu den Ebenen (H_1) und (H). Durch eine solche Homothetie werden die Erzeugenden des Kegels in sich selbst und die Ebene (H) in eine parallele Ebene (H_1) transformiert. Bezeichnet man mit S_1 und S die Zahlen, welche die von den Kurven (C_1) und (C) begrenzten Flächen messen, so erhält man (Nr. 294)

$$S_1 = k^2 S.$$

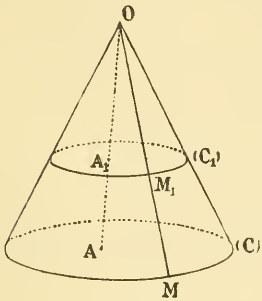


Fig. 163.

Dies vorausgesetzt, betrachten wir zwei Kegel V, V', welche äquivalente Grundflächen und gleiche Höhen haben. Man kann sie stellen, daß sie zwischen denselben äußersten Ebenen (H), (K) zu liegen kommen; S sei die Zahl, welche die Grundfläche eines der beiden Kegel mißt.

Schneidet man diese beiden Kegel durch eine und dieselbe Ebene (H_1) parallel zu den Grundflächen, so bestimmt diese Ebene in den beiden Kegeln zwei ebene Schnitte, deren Fläche durch die Zahlen $k^2 S$ gemessen werden; beide Kegel sind also äquivalent. Zwei Kegel oder zwei Pyramiden, welche gleiche Höhen und äquivalente Grundflächen haben, sind äquivalent.

Ist dieser Satz einmal bewiesen, so kann man leicht nachweisen, daß jede dreiseitige Pyramide angesehen werden kann als das Drittel

---

gemeinen nicht senkrecht aufeinander. Man beweist, daß diese drei Kurven bei geeigneter Wahl der Achsen eine Gleichung der Form

$$y^2 = 2px + nx^2$$

haben. n ist bei der Ellipse eine negative, bei der Hyperbel eine positive Zahl und bei der Parabel Null. Diese Kurven sind dieselben, die man in der analytischen Geometrie als Kurven zweiten Grades bezeichnet.

eines Prismas mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Der Leser findet diesen Beweis in jeder elementaren Geometrie. Hieraus schließt man: Der Inhalt der dreiseitigen Pyramide habe als Maß ein Drittel des Produktes der Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe. Die Regel ist dieselbe für einen beliebigen Kegel, da der Kegel äquivalent ist mit der dreiseitigen Pyramide von gleicher Höhe, deren Grundfläche ein der Grundfläche des Kegels äquivalentes Dreieck ist. In Nr. 310 beweisen wir diesen Satz anders.

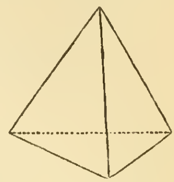


Fig. 164.

308. Diese Beispiele zeigen deutlich die große Anwendung, deren der in Nr. 305 ausgesprochene Satz fähig ist. Er erlaubt, auf ganz natürliche Weise die Volumina verschiedener Körper von anderen, deren Ausdruck man kennt, abzuleiten. Aber man kann ihn auch durch eine andere Methode ersetzen, die viel umfassender ist und den Ausdruck eines Volumens V, der zwischen zwei parallelen Ebenen (H), (K) liegt, zu finden gestattet, so oft man die Fläche eines Schnittes berechnen kann, den eine mit (H), (K) parallele Ebene im Körper V bestimmt. Im Grunde genommen ist diese Methode dieselbe wie die in Nr. 297 erörterte.

Denken wir uns die Ebene (H) horizontal und die Ebene (K) über derselben liegend. Der Körper (V), der durch die Fläche (S) begrenzt ist, befindet sich ganz zwischen diesen zwei Ebenen, deren Abstand wir durch a bezeichnen. Betrachtet man eine *veränderliche* Ebene (P), welche parallel mit der Ebene (H) ist und zwischen den Ebenen (H) und (K) liegt, so ist diese Ebene dadurch bestimmt, daß man ihre Entfernung z zur Ebene H angibt; dieser Abstand kann von 0 bis a ändern. Der Teil des Inhaltes V, der zwischen der Ebene (H) und der Ebene (P) liegt, ist eine Funktion von z, die zugleich mit z wächst, für den Wert $z = 0$ Null wird, und deren Wert für $z = a$ den gesuchten Ausdruck des Inhaltes V gibt. Diese Funktion bezeichne ich durch $F(z)$. Andererseits schneidet die Ebene (P) die Fläche (S) längs einer Kurve (C); diese Kurve begrenzt eine ebene Fläche, die nichts anderes als der durch die Ebene (P) bestimmte Schnitt des Körpers

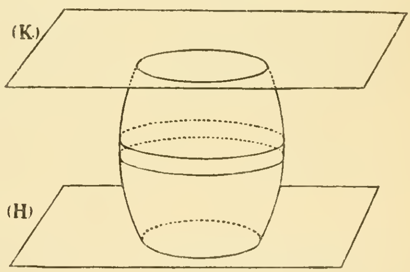


Fig. 165.

(V) ist. Ich nehme an, man könne diese Fläche für jeden Wert von z berechnen, und ich bezeichne die Funktion von z, die ihr Maß angibt, durch $f(z)$.

Die Funktion $f(z)$ ist nichts anderes als die Ableitung $F'(z)$ der Funktion $F(z)$.

Betrachten wir nämlich neben der Ebene (P), die in einer Entfernung z von der Ebene (H) liegt, eine Ebene (P_1), die immer parallel mit (H) ist, aber ein wenig höher als die Ebene (P) liegt. Ihr Abstand von (H) sei $z + h$. Diese Ebene trennt einen Teil des Körpers V ab; dieser Teil liegt zwischen ihr und der Ebene (H) und sein Volumen ist gegeben durch $F(z + h)$. Sie bestimmt in der Fläche (S) eine Kurve (C_1), welche eine Fläche begrenzt, deren Ausdruck $f(z + h)$ ist. Die beiden Ebenen (P), (P_1) schließen eine runde Schicht von ganz geringer Dicke h ein. Das Volumen dieser Schicht ist $F(z + h) - F(z)$; die Form dieser Schicht unterscheidet sich sehr wenig von der eines senkrechten Zylinders, dessen Grundfläche die durch die Kurve (C) begrenzte Fläche in der Ebene (P) ist, und die $f(z)$ als Maßzahl hat. Der Inhalt des Zylinders ist $h \cdot f(z)$; der Inhalt der runden Schicht wäre genau gleich dem Volumen eines geraden Zylinders, der gleiche Höhe h hätte und dessen Grundfläche vielleicht ein wenig größer, vielleicht ein wenig kleiner als die durch die Kurve (C) begrenzte ebene Fläche wäre; jedenfalls aber wäre sie beliebig wenig von ihr verschieden, wenn h klein genug gewählt wird (Nr. 305). Bezeichnet man mit $f(z) + \alpha$ die Zahl, welche die Grundfläche des geraden Zylinders von der Höhe h mißt, dessen Inhalt genau dem Inhalte der runden Schicht gleich wäre, so wird α eine positive oder negative Zahl sein, deren absoluter Wert beliebig klein ist, wenn h klein genug ist, und man erhält

$$F(z + h) - F(z) = h\,[f(z) + \alpha]$$

und folglich

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} = f(z) + \alpha .$$

Für genügend kleines h ist die zweite Seite beliebig wenig von $f(z)$ verschieden. $f(z)$ ist also der Grenzwert, dem sich die erste Seite unaufhörlich nähert, wenn h sich der 0 nähert. Mit anderen Worten, $f(z)$ ist die Ableitung von $F(z)$.

Um also den gesuchten Inhalt zu berechnen, beginnt man damit, eine Funktion $\varphi(z)$ zu suchen, deren Ableitung $f(z)$ sei, und man ist sicher, daß der Unterschied zwischen der Funktion $F(z)$ und $\varphi(z)$ eine konstante Zahl C ist; mit anderen Worten, man erhält:

$$F(z) = \varphi(z) + C;$$

übrigens muß $F(z)$ Null sein für $z=0$; $\varphi(0)+C$ muß Null sein; C ist gleich $-\varphi(0)$, und man hat schließlich

$$F(z)=\varphi(z)-\varphi(0).$$

Im speziellen ist der gesuchte Inhalt

$$F(a)=\varphi(a)-\varphi(0).$$

Es ist klar, daß der Teil des Inhaltes V, der zwischen zwei mit H parallelen Ebenen liegt, deren Entfernungen zur Ebene H z_0 und z_1 betragen, als Maß hat

$$F(z_1)-F(z_0)=\varphi(z_1)-\varphi(z_0).$$

309. Nehmen wir z. B. an, der zu berechnende Inhalt sei der eines schiefen Zylinders mit der Höhe a und der Basis S. Hier bestimmen alle Ebenen, die parallel mit der Basis sind, Schnitte, die gleich S sind; die Funktion $f(z)$ ist beständig gleich S; Sz ist eine Funktion von z, deren Ableitung S ist. Der Unterschied zwischen den Werten dieser Funktion für $z=a$ und $z=0$ ist Sa; dies ist der Ausdruck des Inhaltes des Zylinders.

310. Betrachten wir jetzt einen Kegel, dessen Scheitel in 0 liegt und dessen Grundfläche durch die Kurve (C) begrenzt ist. Zur größeren Leichtigkeit nehmen wir an, diese Kurve liege in der Ebene (K), die Spitze dagegen, welche nach unten gerichtet ist, befinde sich in der mit (K) parallelen Ebene (H). Wir nehmen ferner an, das Lot OA, das man vom Punkte 0 auf die Grundfläche fällt, schneide in B die veränderliche Ebene (P), welche auf der Fläche des Kegels die mit (C) homothetische Kurve (C_1) bestimmt. Das Verhältnis der Homothetie ist $\frac{OB}{OA}$ oder $\frac{z}{a}$, wenn z der Abstand der Ebenen (H) und (P) und a die Höhe des Kegels ist.

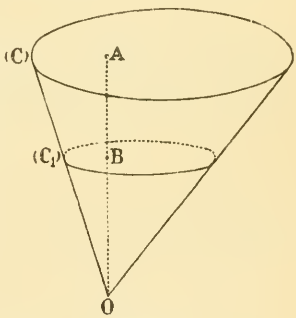


Fig. 166.

Ist S die Zahl, welche die Grundfläche des Kegels mißt, so hat die durch die Kurve (C_1) begrenzte Fläche als Ausdruck $S\frac{z^2}{a^2}$; man erhält also hier

$$f(z)=\frac{S}{a^2}z^2;$$

$\frac{S}{a^2}\frac{z3}{3}$ ist eine Funktion, deren Ableitung $\frac{S}{a^2}z^2$ ist. Man muß noch den Unterschied der Werte suchen, den diese Funktion für $z = a$ und $z = 0$ annimmt. Dieser Unterschied ist

$$\frac{S}{a^2}\frac{a^3}{3} = \frac{Sa}{3}.$$

Dies ist der Ausdruck des Volumen des Kegels.

Der Inhalt des Körpers zwischen den beiden Ebenen (P) und (K), den man *abgestumpften Kegel mit parallelen Grundflächen* nennt, ist nach dem oben Gesagten

$$\frac{S}{a^2}\frac{a^3}{3} - \frac{S}{a^2}\frac{z^3}{3} = \frac{S}{3a^2}(a^3 - z^3),$$

oder auch (Nr. 182)

$$\frac{S}{3a^2}(a^2 + az + z^2)(a - z).$$

Setzt man

$$S' = S\frac{z^2}{a^2},$$

so wird S' der Ausdruck, der von der Kurve (C_1) begrenzten Fläche sein, oder wenn man will, eine der Grundflächen des Kegelstumpfes, während die andere S als Maßzahl hat. Man erhält alsdann

$$\frac{S}{a^2}(a^2 + az + z^2) = S + S\frac{z}{a} + S';$$

$\left(S\frac{z}{a}\right)^2$ ist übrigens gleich SS'; man kann also $S\frac{z}{a}$ durch $\sqrt{SS'}$ ersetzen und den Ausdruck des Inhaltes schließlich unter der Form

$$\frac{a - z}{3}(S + \sqrt{SS'} + S')$$

schreiben. $a - z$ ist der Abstand der beiden Grundflächen oder die *Höhe* des Stumpfes.

311. Betrachten wir die von dem Halbkreise AEB durch Drehung um den Halbmesser AOB erzeugte Kugel. Der auf AB senkrechte Radius OE bleibt in einer Ebene (H), die ebenfalls senkrecht zu AB ist. Der Punkt E beschreibt einen Hauptkreis der Kugel, welcher in dieser Ebene liegt. R sei der Radius dieses Kreises oder der Kugel. Wir betrachten den Inhalt der oberhalb der Ebene (H) liegenden Halbkugel. Man kann als Ebene (K) die parallel mit der Ebene (H) laufende Ebene ansehen, welche durch den Endpunkt A des Durchmessers AB geht. Eine mit (H) parallele Ebene (P) schneidet die Kugel längs eines Kreises (C), dessen Zentrum im Punkte I, dem

Schnittpunkte mit dem Durchmesser AB, liegt. Dieser Kreis wird durch den Punkt M des Halbkreises AEB beschrieben. Zwischen seinem Radius MI, dem Radius R der Kugel und dem Abstande z der Ebene (P) zur Ebene (H) besteht die Beziehung:

$$\overline{MI}^2 = R^2 - z^2.$$

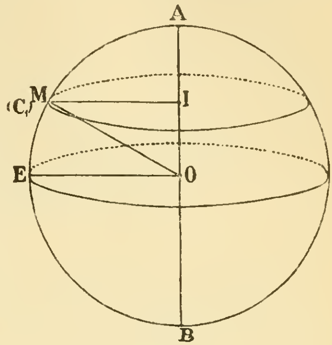


Fig. 167.

Dies erhält aus dem in I rechtwinkligen Dreieck OIM, dessen Hypotenuse gleich R und die Kathete OI gleich z ist. Die Fläche des Kreises, der durch die Ebene (P) auf der Kugel bestimmt wird, ist also

$$\pi(R^2 - z^2).$$

Nun aber hat die Funktion

$$\pi\left(R^2 z - \frac{z^3}{3}\right)$$

als Ableitung $\pi(R^2 - z^2)$. Um den Inhalt der Halbkugel zu finden, muß man den Unterschied der Werte dieser Funktion für $z = R$ und $z = 0$ suchen. Man findet $\frac{2}{3}\pi R^3$. Der Inhalt der ganzen Kugel ist mithin $\frac{4\pi R^3}{3}$. Die Funktion

$$\pi\left(R^2 z - \frac{z^3}{3}\right)$$

gibt den Inhalt zwischen den beiden Ebenen (H) und (P) an.

IX. Kapitel.

Grenzwerte. Unendlich kleine Größen. Bestimmtes Integral. Reihen.

§ 1. Grenzwerte.

312. Das Wort *Grenzwert* ist sehr oft im Laufe dieses Werkes gebraucht worden, und zwar in einer Bedeutung, die für jeden einzelnen Fall verdeutlicht werden mußte. Die Bedeutung, die man diesem Worte in der Geometrie beilegt, wollen wir übergehen. Dort gebraucht man oft die Ausdrucksweise: eine veränderliche Figur (F) hat unter gewissen Bedingungen als Grenzwert eine unveränderliche Figur (F_0). Handelt es sich um Zahlen, so versteht man unter Grenzwert einer veränderlichen Zahl A immer eine unveränderliche Zahl A_0, welcher die veränderliche Zahl A sich unter immer näher zu spezifizierenden Bedingungen unendlich nähert: unter diesen Bedingungen wird der Unterschied $A_0 - A$ beliebig klein an absolutem Wert; er ist selbst eine veränderliche Zahl, die als Grenzwert die feste Zahl 0 hat.

313. Gewöhnlich ist die Veränderliche A eine Funktion $f(x)$ einer gewissen Veränderlichen x; diese Veränderliche kann z. B. Werte annehmen, welche beliebig nahe an eine feste Zahl x_0 herankommen, oder sie kann beliebig groß werden. Es können übrigens verschiedene Fälle eintreten. Nimmt man z. B. den ersten Fall, so kann es vorkommen, daß die Veränderliche x sich dem Werte x_0 nähern kann durch obere *und* untere Näherungswerte, durch obere *oder* untere Näherungswerte; es kann auch der Fall eintreten, daß x nur bestimmte Werte, etwa $x_0 + \frac{1}{n}$, $x_0 + \frac{1}{10^n}$, annehmen kann (wobei n eine beliebig große, natürliche Zahl bedeutet). Im besonderen ist es möglich, daß die Funktion $f(x)$ nur für Werte dieser Form definiert sei. In jedem Falle müssen die Werte, welche x bei seiner Annäherung an x_0 annehmen kann, spezifiziert werden; unerläßliche Bedingung, um von Grenzwert reden zu können, ist aber jedenfalls, daß sich unter diesen Werten deren befinden, die beliebig wenig von x_0 verschieden sind.

Es sei nun A_0 eine unveränderliche Zahl: sagt man, $f(x)$ habe als Grenzwert A_0, wenn die Veränderliche x sich x_0 nähert, indem sie (wie ich von nun an stillschweigend voraussetze) nur die Werte annimmt, die sie annehmen kann, so heißt das, die Differenz $f(x) - A_0$ ist an absolutem Werte kleiner als eine beliebige positive Zahl, unter der Bedingung, daß die Differenz $x - x_0$ selbst genügend klein an absolutem Werte ist. Hat $f(x)$ z. B. A_0 als Grenzwert, wenn x sich x_0 nähert, so ist sicherlich die Differenz $f(x) - A_0$ kleiner an absolutem Werte als 0,0001, vorausgesetzt, daß die Differenz $x - x_0$ genügend klein an absolutem Werte sei, d. h. vorausgesetzt, daß $x - x_0$ an absolutem Werte unter einer bestimmten festen Zahl, z. B. 0,0003 liege. Natürlich hängt (im allgemeinen wenigstens) diese letztere Zahl (0,0003 in unserem Beispiel) ab von der Differenz $f(x) - A_0$ (0,0001 in unserem Beispiel), die man erreichen will.

Will man also streng beweisen, daß die Funktion $f(x)$ als Grenzwert A_0 hat, wenn x sich x_0 nähert, so verfährt man folgendermaßen: man wählt eine willkürliche, positive Zahl α, und man sucht zu beweisen, daß die Differenz $f(x) - A_0$ an absolutem Werte kleiner ist als α, sobald die Differenz $x - x_0$ an absolutem Werte kleiner ist als β. Man kann ebensogut sagen, die Funktion $f(x)$ liege zwischen $A_0 - \alpha$ und $A_0 + \alpha$, vorausgesetzt, daß x zwischen $x_0 - \beta$ und $x_0 + \beta$ liege. Ist bewiesen, daß man für jede positive Zahl α die positive Zahl β finden kann, so ist sicher, daß $f(x)$ als Grenze A_0 hat, wenn x sich x_0 nähert; man sagt kürzer, A_0 sei der Grenzwert von $f(x)$ für $x = x_0$; man schreibt dies

$$\lim_{x = x_0} f(x) = A_0.$$

Ebenso ist folgende Ausdrucksweise zu verstehen: Mit unendlich wachsendem x hat $f(x)$ als Grenzwert A_0. Es kann vorkommen, daß x alle möglichen Werte oder auch, daß es nur bestimmte Werte, ganzzahlige z. B., annehmen kann: aber von Grenze kann unter diesen Bedingungen nur die Rede sein, wenn sich unter den Werten, die x annehmen kann, deren vorfinden, die an absolutem Werte beliebig groß sind. Um z. B. zu beweisen, daß $f(x)$ mit unendlich wachsendem x als Grenze A_0 hat, muß man beweisen, daß die Differenz $f(x) - A_0$ an absolutem Werte geringer ist als eine willkürlich gewählte positive Zahl α, vorausgesetzt, daß x größer ist als eine gewisse positive Zahl P, die im allgemeinen von α abhängig ist. Man sagt dann, daß für $x = +\infty$, $f(x)$ als Grenze A_0 hat, und man schreibt

$$\lim_{x = +\infty} f(x) = A_0.$$

314. Ebenso präzisiert man die Bedeutung folgender Ausdrücke: $f(x)$ wird unendlich, wenn x sich x_0 nähert, d. h. der absolute Wert von $f(x)$ ist größer als eine beliebige positive Zahl P, vorausgesetzt, daß die Differenz $x - x_0$ an absolutem Werte kleiner sei als eine bestimmte positive Zahl β, die im allgemeinen von P abhängig ist. Man muß auch noch für jede Zahl P die Zahl β finden können. Man kann übrigens gelegentlich die Fälle unterscheiden, in denen $f(x)$ durch positive oder durch negative Werte unendlich wird, die Fälle, in denen, wie man sagt, $f(x)$ sich $+\infty$ oder $-\infty$ nähert. Desgleichen folgender Ausdruck: $f(x)$ wird unendlich mit positiv unendlich wachsendem x, d. h. der absolute Wert von $f(x)$ ist größer als die positive Zahl P, vorausgesetzt, daß die Zahl x größer sei als eine bestimmte positive Zahl Q, die im allgemeinen von P abhängt; aber, welches auch immer P sei, es muß möglich sein, die Zahl Q zu finden.

315. Es ist meiner Meinung nach nicht nötig, bei der Beweisführung untenstehender Sätze länger zu verweilen. Man hat schon oft Gelegenheit gefunden, sie anzuwenden, und sie sind im Grunde genommen weiter nichts als die in Nr. 64 und 127 formulierten und aufgestellten Sätze in eine etwas genauere Fassung gebracht.

Sind A, B veränderliche Größen, die unter bestimmten Bedingungen als Grenzen die festen Zahlen A_0, B_0 haben, so haben die veränderlichen Größen $A + B$, $A - B$, AB als Grenzen, unter denselben Bedingungen $A_0 + B_0$, $A_0 - B_0$, $A_0 B_0$. Ist B_0 nicht Null, so hat das Verhältnis $\frac{A}{B}$ als Grenze $\frac{A_0}{B_0}$.

§ 2. Unendlich kleine Größen.

316. Eine veränderliche Größe nennt man unendlich klein, wenn sie als Grenzwert 0 hat; natürlich muß man immer spezifizieren, unter welchen Bedingungen diese veränderliche Größe als Grenze 0 hat (unendlich klein ist). Sehr oft ist die in Frage stehende veränderliche Größe eine Funktion einer anderen veränderlichen, von der man *annimmt*, sie nähere sich selbst 0, sie sei unendlich klein. So sagt man, daß die Funktionen $2x$, x^2 mit x unendlich klein werden.

Eine veränderliche Größe wird als unendlich groß bezeichnet, wenn ihr absoluter Wert unter Bedingungen, die immer näher zu spezifizieren sind, eine beliebige positive Zahl übersteigt. So werden die Funktionen $2x$, x^2 mit x unendlich groß. Die Funktion $\frac{1}{x}$ wird unendlich groß, wenn x unendlich klein wird. Sie wird unendlich klein, wenn x unendlich groß wird. Sagt man

$$\lim_{x=x_0} f(x) = A_0,$$

so heißt das, die Funktion $f(x) - A_0$ werde unendlich klein mit $x - x_0$, oder wenn $x - x_0$ unendlich klein wird.

317. Sind A, B veränderliche Größen, die unter denselben Bedingungen unendlich klein sein sollen, so sagt man, diese beiden unendlich kleinen Größen seien *von derselben Ordnung*, wenn der absolute Wert des Verhältnisses $\frac{A}{B}$ unter diesen Bedingungen immer zwischen zwei festen *positiven* Zahlen bleibt: unter positiv verstehe ich, daß keine der beiden Zahlen Null sein soll.

So sind $2x$, $3x$ unendlich kleine Größen, wenn x sich 0 nähert, ihr Verhältnis ist immer gleich $\frac{2}{3}$; es sind unendlich kleine Größen derselben Ordnung.

Hat im besonderen das Verhältnis $\frac{A}{B}$ als Grenze eine feste, von 0 verschiedene Zahl, so kann man natürlich behaupten, die beiden unendlich kleinen Werte A und B seien von derselben Ordnung, da ja, wenn l der absolute Wert der Grenze ist, der absolute Wert des Verhältnisses $\frac{A}{B}$ schließlich notwendigerweise zwischen zwei Zahlen, die sehr nahe bei l liegen, enthalten bleibt. Es ist das der häufigste Fall bei einfachen Anwendungen.

Hat hingegen, unter gegebenen Bedingungen, das Verhältnis $\frac{A}{B}$ als Grenze 0, so sagt man, A sei im Verhältnis zu B unendlich klein, oder A sei eine unendlich kleine Größe von einer höheren Ordnung als B. In diesem Falle ist das Verhältnis $\frac{A}{B}$ selbst eine unendlich kleine Größe C; so daß jede unendlich kleine Größe A von einer höheren Ordnung als B als das Produkt von B mit einer unendlich kleinen Größe angesehen werden kann. Unter denselben Bedingungen ist B eine unendlich kleine Größe von einer Ordnung, die niedriger als A ist.

So sind die Ausdrücke x, x^2, x^3, ... unendlich klein, zugleich ist jeder von ihnen eine unendlich kleine Größe von einer höheren Ordnung als der vorhergehende.

318. Um die infinitesimale Ordnung einer unendlich kleinen Größe A genauer zu definieren, wählt man einen *unendlich kleinen*

Hauptwert α; natürlich muß die veränderliche Größe α unter denselben Bedingungen wie A unendlich klein werden; tritt der Fall ein, daß A von derselben Ordnung ist wie α^n, und zwar in dem oben gegebenen Sinne, wobei wir durch n eine natürliche ganze Zahl bezeichnen, so sagt man, A sei eine unendlich kleine Größe n-ter Ordnung. Im besonderen ist α^n selbst eine unendlich kleine Größe n-ter Ordnung. Eine unendlich kleine Größe hat nicht notwendigerweise eine bestimmte Ordnung.

Ist α der unendlich kleine Hauptwert, so kann nach dem, was eben gesagt worden ist, eine unendlich kleine Größe von der Ordnung n unter der Form $K\alpha^n$ ausgedrückt werden; K ist dann eine (im allgemeinen veränderliche) Zahl, deren absoluter Wert zwischen positiven festen Zahlen enthalten bleibt: das ist im besondern der Fall, wenn K einen von 0 verschiedenen Grenzwert hat. Umgekehrt ist jede Größe von dieser Form unter der Bedingung, die K auferlegt ist, eine unendlich kleine Größe von der Ordnung n.

Betrachtet man zwei unendlich kleine Größen $K\alpha^p$, $K'\alpha^q$ von der Ordnung p resp. q, so kann, wenn $p < q$ ist, ihre Summe folgendermaßen geschrieben werden:

$$K\alpha^p + K'\alpha^q = (K + K'\alpha^{q-p})\alpha^p;$$

hierdurch wird sofort ersichtlich, daß diese Summe eine unendlich kleine Größe ist, deren Ordnung die kleinste der Zahlen p, q ist, da der Faktor $K + K'\alpha^{q-p}$ beliebig wenig von K verschieden sein kann; sind die beiden Zahlen p, q gleich, so ist die Summe $(K + K')\alpha^p$ jedenfalls von der Ordnung p, wenn $K + K'$ einen von 0 verschiedenen Grenzwert hat; sie ist von einer höheren Ordnung, wenn $K + K'$ als Grenzwert 0 hat.

Das Produkt $KK'\alpha^{p+q}$ der beiden unendlich kleinen Werte $K\alpha^p$, $K'\alpha^q$, von den Ordnungen p, q, ist immer von der Ordnung $p + q$, da ja der absolute Wert von KK' jedenfalls zwischen festen positiven Zahlen enthalten bleibt.

Haben K und K' (von 0 verschiedene) Grenzwerte, so ist das Verhältnis $\frac{K\alpha^p}{K'\alpha^q}$, das man $\frac{K}{K'}\alpha^{p-q}$, $\frac{K}{K'}$, $\frac{K}{K'}\frac{1}{\alpha^{q-p}}$ schreiben kann, je nachdem p größer, gleich oder kleiner als q ist, im ersten Falle unendlich klein, von der Ordnung $p - q$; im zweiten Falle hat es als Grenze die Grenze von $\frac{K}{K'}$; im dritten Falle ist es unendlich groß.

319. Werden die beiden veränderlichen Größen A, B unter denselben Bedingungen unendlich klein, so sagt man, die beiden unendlich kleinen Größen A, B seien *äquivalent*, wenn ihre Differenz unendlich klein im Verhältnis zu einer derselben ist, oder daß ihr Verhältnis $\frac{A}{B}$ als Grenzwert die Einheit hat.

Diese beiden Definitionen sind eigentlich nicht voneinander verschieden. Denn man hat

$$A - B = B\left(\frac{A}{B} - 1\right) = A\left(1 - \frac{B}{A}\right).$$

Hat $\frac{A}{B}$ als Grenze 1, so ist deshalb der Fall für das umgekehrte Verhältnis $\frac{B}{A}$, und die Differenz $A - B$ kann als das Produkt von B oder von A mit einer unendlich kleinen Größe $\frac{A}{B} - 1$ oder $1 - \frac{B}{A}$ angesehen werden. Diese Differenz $A - B$ ist unendlich klein im Verhältnis zu A oder zu B.

Ist die Differenz $A - B$ unendlich klein im Verhältnis zu B, so kommt das daher, daß das Verhältnis $\frac{A-B}{B}$ oder $\frac{A}{B} - 1$ unendlich klein ist, und folglich, daß das Verhältnis $\frac{A}{B}$ als Grenzwert 1 hat. Der Beweis ist derselbe, wenn $A - B$ unendlich klein im Verhältnis zu A ist.

320. Hat man eine Summe unendlich kleiner Größen verschiedener Ordnungen, so ist die unendlich kleine Größe der kleinsten Ordnung augenscheinlich mit dieser Summe äquivalent: man nennt ihn oft Hauptteil oder Hauptglied der Summe. Im Falle, wo man mit einer Summe zu tun hätte, die durch ein konstantes, von 0 verschiedenes Glied und von unendlich kleinen Gliedern gebildet würde, müßte man das konstante Glied als das Hauptglied der Summe, deren Grenze es augenscheinlich ist, ansehen.

Betrachtet man ein nach steigenden Potenzen von x geordnetes Polynom, zum Beispiel

$$2x^3 - 3x^4 + 4x^5 + 8x^6,$$

so hat jedes Glied, wenn man x als den unendlich kleinen Hauptwert ansieht, die gleiche Ordnung wie sein Grad: das erste Glied ist das Hauptglied, es ist mit dem Polynom äquivalent. In dem vorgehenden Beispiel gibt es kein konstantes Glied. Betrachtet man ein beliebiges, nach steigenden Potenzen von x geordnetes Polynom

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots,$$

und setzt man an die Stelle dieses Polynoms die Ausdrücke

$$a, \; a + bx, \; a + b + cx^2, \ldots,$$

die man erhält, indem man ein, zwei, drei ... Glieder nimmt, so ist die Differenz zwischen dem Polynom und einem dieser Ausdrücke, wenn man x als den unendlich kleinen Hauptwert ansieht, eine unendlich kleine Größe von einer Ordnung, die derjenigen des ersten vernachlässigten Gliedes gleich ist. Man möge diese Resultate mit dem oben in Nr. 130 Gesagten vergleichen.

321. Es sei $y = f(x)$ eine Funktion von x, die für $x = x_0$ eine Ableitung $f'(x_0)$ besitzt; das heißt, das Verhältnis

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h}$$

hat als Grenze $f'(x_0)$, wenn h unendlich klein wird, oder auch, die Differenz α zwischen diesem Verhältnis und $f'(x_0)$ wird mit h unendlich klein; man kann das so ausdrücken:

$$\frac{f(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha$$

oder

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0) + h\alpha;$$

sieht man h als den unendlich kleinen Hauptwert an, so ist $h\alpha$ eine unendlich kleine Größe von einer höhern Ordnung als die erste; ist $f'(x_0)$ nicht 0, so ist die zweite Seite eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung und mit $hf'(x_0)$ äquivalent.

Ist h nicht unendlich klein, aber doch immer sehr klein, so kann man $hf'(x_0)$ als Näherungswert von $f(x_0 + h) - f(x_0)$ nehmen; diese Größe $hf'(x_0)$ ist mit h proportional; man sieht also, daß, wenn die Veränderliche um kleine Werte zunimmt, die Zunahme der Funktion sozusagen proportional mit der Zunahme der Veränderlichen ist. Diese Bemerkung rechtfertigt die Regeln, die man in den meisten numerischen Tabellen, wie den Logarithmentafeln, den Sinustafeln usw., findet, und die uns zeigen, wie man den Wert einer Funktion erhält, die einer Zahl entspricht, welche nicht in der Tafel steht, sondern zwischen zwei sehr nahe beieinander liegenden und in der Tafel enthaltenen Zahlen liegt. Diese Regel wird übrigens allgemein in allen angewandten Wissenschaften gebraucht.

Die Größe h kann auch als ein kleiner Zuwachs der Veränderlichen x angesehen werden; sie wird dann oft das *Differential* von x genannt und durch das Symbol dx dargestellt; das Differential (der ersten Ordnung) der Funktion y oder $f(x)$ wird definiert als das Produkt $f'(x)\,dx$; man stellt es durch das Symbol dy dar.

Ist $f'(x_0) = 0$, so sieht man, daß der Zuwachs $f(x_0 + h) - f(x_0)$ der Funktion $f(x)$ von einer höheren Ordnung ist als der Zuwachs h der Veränderlichen. Das trifft im allgemeinen bei den Werten von x ein, für welche die Funktion ein Maximum oder ein Minimum hat.

322. Stellen wir die Funktion $y = f(x)$ durch eine Kurve dar; es seien M_0 der Punkt, dessen Koordinaten $x_0 = \overline{OP_0}$, $y_0 = f(x_0) = \overline{P_0 M_0}$ sind, M_1 der Punkt, dessen Koordinaten

$$x_0 + h = \overline{OP_1},\ f(x_0 + h) = \overline{P_1 M_1}$$

sind; dann ist:

$$h = \overline{P_0 P_1},\ f(x_0 + h) - f(x_0) = \overline{QM_1},$$

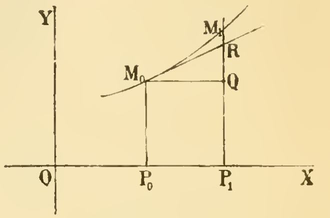


Fig. 168.

indem man durch Q den Punkt bezeichnet, wo die durch den Punkt M_0 zu der x-Achse gelegte Parallele $P_1 M_1$ schneidet.

Der Richtungskoeffizient der Tangente in M_0 ist $f'(x_0)$; es seien x, y die Koordinaten eines beliebigen Punktes dieser Tangente; da die Richtungskonstante einer Geraden, welche den Punkt (x, y) mit dem Punkt (x_0, y_0) verbindet, $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ ist, so muß, wenn der Punkt (x, y) auf der durch M_0 gehenden Tangente liegt,

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x)$$

sein; mit andern Worten, diese Gleichung ist die Gleichung der Tangente im Punkt x_0, y_0. Will man die Ordinate des Punktes R haben, wo diese Tangente die Gerade $P_1 M_1$ schneidet, so genügt es, in der vorhergehenden Gleichung x durch die Abszisse $x_0 + h$ der Punkte dieser Geraden zu ersetzen; man erhält auf diese Weise

$$\frac{y - y_0}{h} = f'(x_0),$$

woraus man schließen kann:

$$y - y_0 = \overline{P_1 R} - \overline{P_1 Q} = \overline{QR} = h f'(x_0).$$

Da der Zuwachs

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h f'(x_0) + h\alpha$$

gleich $\overline{QM}$ ist, so sieht man, daß $\overline{RM_1}$ gleich $h\alpha$ ist.

Mit einem Worte, ist $\overline{P_0 P_1}$ unendlich klein, so ist dasselbe der Fall für die Größen $\overline{QR}$, $\overline{QM_1}$: diese beiden Größen sind äquivalente unendlich kleine Größen; $\overline{RM_1}$ ist eine unendlich kleine Größe von einer höhern Ordnung. Ersetzt man den Zuwachs $\overline{QM_1}$ der Funktion durch den Hauptteil $hf'(x_0)$ oder $\overline{QR}$, so ist das dasselbe, wie wenn man an Stelle des Punktes M_1 den Punkt R setzt, d. h. in der Umgebung des Punktes M_0 die Kurve mit ihrer Tangente zusammenfallen läßt*). Auf einer Geraden ist die Vergrößerung der Ordinate proportional der Vergrößerung der Abszisse (Nr. 242).

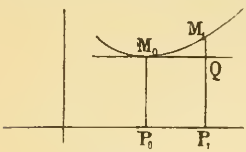


Fig. 169.

In der vorhergehenden Figur wurde vorausgesetzt, daß die Tangente in M_0 weder zur y- noch zur x-Achse parallel ist. Ist die Tangente zur x-Achse parallel, so zeigt die nebenstehende Figur, daß die Zunahme der Ordinate in der Umgebung des Punktes M_0 im Verhältnis zur Zunahme der Abszisse sehr klein ist.

323. Betrachten wir in einem Kreise mit dem Mittelpunkt O einen Bogen MM' (kleiner als ein Halbkreis). Es sei AA' der durch die Mitte A dieses Bogens gehende Durchmesser: die ganze Figur ist in bezug auf diesen Durchmesser symmetrisch; er steht auf der Mitte der Sehne MM' senkrecht, und die beiden Tangenten des Kreises in M, M' treffen ihn in einem und demselben Punkte T. Angenommen, der Durchmesser AA' sei unbeweglich und die Punkte M, M' nähern sich unaufhörlich dem Punkte A, indem sie in bezug auf

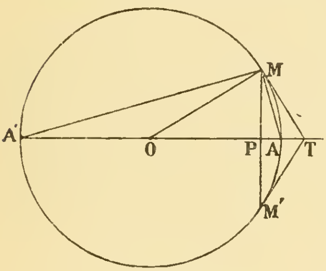


Fig. 170.

*) Ist x_0 ein Näherungswert einer Wurzel der Gleichung und bezeichnet man durch $x_0 + h$ den genauen Wert der Wurzel, so ist h keine unendlich kleine Größe, sondern eine sehr kleine konstante Zahl. Der Zuwachs der Funktion ist dann $-f(x_0)$, da $f(x_0 + h)$ Null ist; da dieser Zuwachs fast gleich $-hf'(x_0)$ ist, so hat man annähernd

$$h = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

und der Wert

$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ist im allgemeinen viel näher bei der Wurzel als x_0. Das ist unter einer allgemeinen Form die Näherungsmethode Newtons, von der schon in Nr. 286 die Rede war. Nach dem, was eben gesagt worden ist, besteht sie eben darin, daß man an Stelle des Schnittpunktes der Kurve (deren Gleichung $y = f(x)$ ist), mit der x-Achse den Schnittpunkt dieser Achse mit einer Tangente setzt, deren Berührungspunkt eine nahe bei x_0 liegende Abszisse hat.

den Durchmesser symmetrisch bleiben: dann sind der Bogen MM', seine Hälfte AM, die Sehne MM', deren Hälfte PM, die Tangente MT, die Strecken PA, AT alle unendlich kleine Größen; ich setze voraus, daß alle diese Größen mit derselben Längeneinheit berechnet werden.

Die Längen PM, MT sind unendlich kleine Größen derselben Ordnung, und sogar äquivalente unendlich kleine Größen; denn aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $\frac{OPM}{OMT}$ geht hervor, daß

$$\frac{PM}{MT} = \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{OA} = \frac{OA - PA}{OA} = 1 - \frac{PA}{AO}.$$

Da PA unendlich klein ist, so ist es klar, daß $\frac{PA}{OA}$ als Grenze 0 hat, und daß folglich das Verhältnis $\frac{PM}{MT}$ als Grenze 1 hat. PM und MT sind äquivalente unendlich kleine Größen; desgleichen die Sehne MM' und die Summe $MT + M'T$, die das Doppelte von PM resp. MT sind.

Der Flächeninhalt des Ausschnittes OAM liegt zwischen den Flächeninhalten der beiden rechtwinkligen Dreiecke OPM, OMT; man hat also (Nr. 152, 155):

$$\frac{1}{2}\, OP \times PM < \frac{1}{2}\, OA \times \text{Bogen}\, AM < \frac{1}{2}\, OM \times MT,$$

oder, indem man mit 2 multipliziert und durch $PM \times OA$ dividiert:

$$\frac{OP}{OA} < \frac{\text{Bogen}\, AM}{PM} < \frac{MT}{PM};$$

nun ist aber eben bewiesen worden, daß die Verhältnisse $\frac{OP}{OA}$, $\frac{PM}{MT}$ als Grenze die Einheit haben, wenn der Punkt M sich dem Punkt A unendlich nähert; dasselbe ist der Fall für das Verhältnis $\frac{MT}{PM}$; so liegt also das Verhältnis $\frac{\text{Bogen}\, AM}{PM}$ zwischen zwei veränderlichen Größen, die 1 als Grenze haben, wenn M sich A nähert. Dieses Verhältnis hat also auch dieselbe Grenze. Die beiden unendlich kleinen Größen AM und PM sind äquivalent. Dasselbe ist der Fall für die unendlich kleinen Größen, Bogen MM' und Sehne MM', Bogen AM und TM.

Nehmen wir den Bogen AM als unendlich kleinen Hauptwert; die Strecken MP, MT, AM, die mit ihm äquivalent sind, sind auch von der ersten Ordnung. In dem Dreieck AMA', das in M rechtwinklig ist, hat man $AM^2 = AP \times AA'$; $AP = \frac{AM^2}{AA'}$ ist von der zweiten Ordnung, da AM^2 von der zweiten Ordnung und AA' eine feste Zahl ist. Auch ist MT^2 gleich $TA \times TA'$ (Nr. 266); daraus schließt man, daß TA von der zweiten Ordnung ist, da TA' als Grenze AA' hat; TP, die Summe zweier unendlich kleiner Werte der zweiten Ordnung, ist auch eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung.

Die Differenz $TM - PM$ ist kleiner als TP, welches von der zweiten Ordnung ist; diese Differenz ist also wenigstens von der zweiten Ordnung; es ist leicht zu sehen, daß sie von der dritten ist; denn

$$TM - PM = TM\left(1 - \frac{PM}{TM}\right) = TM\left(1 - \frac{OP}{OA}\right) = \frac{TM \times PA}{OA};$$

TM ist von der ersten Ordnung, PA von der zweiten; $TM \times PA$ ist von der dritten Ordnung, OA ist konstant.

Die Differenz Bogen $AM - PM$ ist kleiner als die vorhergehende, sie ist also wenigstens von der dritten Ordnung; desgleichen natürlich die Differenz Bogen MM' — Sehne MM', welche das Doppelte der vorhergehenden ist. Man kann beweisen, daß sie in Wirklichkeit von der dritten Ordnung ist.

Geht man auf Nr. 261 zurück, so sieht man gleich, daß, wenn man den Radius des Kreises gleich der Längeneinheit setzt und die Länge des Bogens MM' durch $2t$ bezeichnet, man folgende Sätze aufgestellt hat: das Verhältnis $\frac{\sin t}{t}$ hat als Grenze 1, wenn t sich 0 nähert; $\sin t$ und t sind äquivalente, unendlich kleine Größen; nimmt man t als unendlich kleinen Hauptwert, so sind $\sin t$ und $\operatorname{tang} t$ von der ersten Ordnung; $1 - \cos t$ von der zweiten; $t - \sin t$ ist mindestens von der dritten.

324. Durch die Betrachtung der äquivalenten, unendlich kleinen Größen wird es oft leicht, die Grenze des Verhältnisses zweier unendlich kleiner Größen A, B zu finden; man kann hierbei A, B durch äquivalente unendlich kleine Werte A', B' ersetzen; denn man hat

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{A'} \times \frac{B'}{B} \times \frac{A'}{B'}.$$

Da A' und B' unendlich kleine Größen sind, die mit A, B äquivalent sind, so haben, der Hypothese gemäß, die Verhältnisse $\frac{A}{A'}$, $\frac{B'}{B}$ als Grenze die Einheit. Hat folglich $\frac{A'}{B'}$ eine Grenze l, so hat das Produkt der drei Faktoren der zweiten Seite auch l als Grenze; mit anderen Worten, $\frac{A}{B}$ hat dieselbe Grenze wie $\frac{A'}{B'}$; man sieht ebenso, daß, wenn $\frac{A}{B}$ eine Grenze hat, $\frac{A'}{B'}$ notwendigerweise dieselbe Grenze hat.

Betrachten wir zum Beispiel den Ausdruck

$$\frac{2x - 3x^2 + 4x^3}{5x - 7x^2 + 8x^5},$$

und nehmen wir an, x nähere sich der 0; wir haben oben gesehen, daß $2x$ und $2x - 3x^2 + 4x^3$ äquivalente unendlich kleine Größen sind; desgleichen sind $5x$ und $5x - 7x^2 + 8x^5$ äquivalent; man kann daher dem vorhergehenden Verhältnis das Verhältnis $\frac{2x}{5x}$ substituieren, dessen Grenze natürlich $\frac{2}{5}$ ist.

Ist t ein unendlich kleiner Bogen, m und n zwei beliebige positive Zahlen; M und N die Sehnen der Bogen mt und nt, die mit t unendlich klein sind, so hat das Verhältnis $\frac{M}{N}$ als Grenze $\frac{m}{n}$; denn M und mt sind äquivalente unendlich kleine Größen, desgleichen N und nt; die Grenze des Verhältnisses $\frac{M}{N}$ ist also dieselbe wie diejenige des Verhältnisses $\frac{mt}{nt}$, also natürlich $\frac{m}{n}$.

Der durch die Gleichheit

$$\lim_{t=0} \cdot \frac{\sin mt}{\sin nt} = \frac{m}{n}$$

ausgedrückte Satz ist im Grunde genommen derselbe wie der vorhergehende.

325. Suchen wir nun die Ableitung von $\sin t$, indem wir uns auf den Fall beschränken, wo t ein positiver Bogen, und zwar kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist. In einem Kreise mit dem Mittelpunkt O und einem Radius $= 1$ wählen wir A als Ausgangspunkt der Bogen, und AM sei der Bogen t, PM ist sein Sinus, OP sein Kosinus.

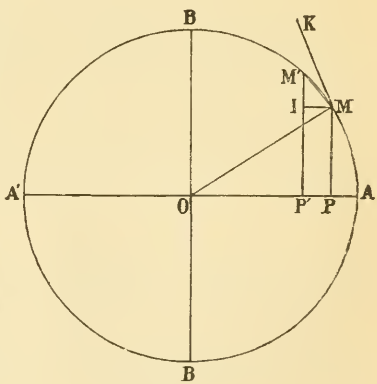


Fig. 171.

Erteilen wir dem Bogen $t = AM$ einen kleinen Zuwachs MM', so hat der Bogen $AM' = t + h$ als Sinus $P'M'$ und als Kosinus OP'; ist MI

parallel mit OA, so ist IM' der dem Zuwachs MM' des Bogens entsprechende Zuwachs des Sinus; zu suchen ist die Grenze des Verhältnisses $\frac{IM'}{\text{Bogen } MM'}$, wenn M' sich dem Punkte M nähert; aber in diesem Falle sind der Bogen MM' und die Sehne MM', die ich einfach durch MM' bezeichne, äquivalente unendlich kleine Größen; es genügt folglich, die Grenze des Verhältnisses $\frac{IM'}{MM'}$ zu suchen; übrigens ist in dem in I rechtwinkligen Dreieck IMM' dieses Verhältnis gleich dem Sinus des Winkels IMM': kommt M' nahe an M heran, so hat die Richtung MM' als Grenze die Richtung MK der in M die Kreislinie berührenden, auf dem Radius OM senkrechten Tangente; der Sinus des Winkels IMM' hat also als Grenze den Sinus des Winkels IMK, der augenscheinlich der Komplementwinkel des Winkels OMI oder des Winkels AOM ist; der Sinus des Winkels IMK ist also gleich dem Kosinus des Winkels AOM oder gleich $\cos t$. Die Ableitung von $\sin t$ ist $\cos t$. Wir haben bei dieser Beweisführung zwar nur die absoluten Werte berücksichtigt; aber es ist leicht einzusehen, daß bei der angenommenen Hypothese die Ableitung von $\sin t$ positiv sein muß, wie übrigens auch $\cos t$. Man kann beweisen, daß für einen beliebigen Wert von t die Ableitung von $\sin t$ gleich $\cos t$ ist.

Man sieht desgleichen, daß für einen positiven Bogen t, der kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, die Ableitung von $\cos t$ gleich $-\sin t$ ist: dieses Resultat ist allgemein; durch ähnliche Erwägungen kann man beweisen, daß die Ableitung von $\operatorname{tang} t$ gleich ist $\frac{1}{\cos^2 t}$ oder $1 + \operatorname{tang}^2 t$.

Aus den vorhergehenden Beispielen ersieht man, wie man das Aufsuchen des Grenzwertes eines Verhältnisses dadurch erleichtern kann, daß man gewissen unendlich kleinen Größen andere äquivalente unendlich kleine Größen substituiert.

326. Durch eine ganz analoge Substitution haben wir in Nr. 295, 296, 304, 305, 306, 307 gewisse Summen vereinfacht, um zur Berechnung eines Flächeninhalts oder eines Volumens zu gelangen: wir haben eine ebene Fläche durch Parallellinien zu der y-Achse in schmale Streifen, einen Körper durch Parallelebenen in Schnitte zerlegt und diesen Streifen einbeschriebene oder umbeschriebene, wenig davon verschiedene Rechtecke, sowie diesen Schnitten wenig davon verschiedene gerade Zylinder substituiert: manchmal sagt man auch, man habe die Fläche in eine unendliche Anzahl unendlich kleiner Streifen, das Volumen in eine unendliche Anzahl unendlich kleiner

Schnitte zerlegt und an die Stelle jeder einzelnen unendlichen kleinen Größe eine äquivalente, unendlich kleine Größe gesetzt.

Ich will mich hier nicht länger bei der Frage aufhalten, ob diese Substitution gerechtfertigt ist; ich möchte nur bemerken, daß diese Ausdrucksweise, die dazu dient, unbestreitbare Analogien in der Berechnung der Grenzen einer Summe oder eines Verhältnisses hervortreten zu lassen, nicht ganz korrekt ist. Denn bei dieser Zerlegung einer ebenen Fläche in schmale Streifen, denen man einbeschriebene oder umbeschriebene Rechtecke substituiert, eines Volumens in flache Schnitte, denen man gerade Zylinder substituiert, hat man eigentlich nicht mit unendlich kleinen Größen in der Bedeutung wie in Nr. 316 zu tun. Bei einer Zerlegung in n-Streifen oder in n-Schnitte ist alles unveränderlich, Streifen und Rechtecke, Schnitte und Zylinder. Es ist keine unendlich kleine Größe dabei. Nimmt n zu, so kann man nicht sagen, daß der Streifen oder der Schnitt unendlich klein *wird*, weil *derselbe Streifen oder derselbe Schnitt ja nicht bestehen bleibt:* kommt man von einer Zerlegung zur andern, so kommen an Stelle der alten Streifen oder Schritte andere Streifen und andere Schritte, und zwar in größerer Anzahl: sie behalten ihre Individualität nicht; man hat also nicht wie in Nr. 316 mit Funktionen einer Veränderlichen zu tun, die unter bestimmten Bedingungen sich der 0 nähern.

Die in Nr. 295 und 296 auseinandergesetzte Methode führt jedoch, um mich auf den Fall der ebenen Flächen zu beschränken, auf einen äußerst wichtigen Begriff, den des *bestimmten Integrals*, den ich mit genügender Allgemeinheit erklären möchte.

§ 3. Bestimmtes Integral.

327. Betrachten wir eine durch die x-Achse, die beiden zur y-Achse Parallelen $A'A$, $B'B$ und die Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ begrenzte Fläche. Sind a und b die Abszissen $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$ der Punkte A und B, so sind ihre Ordinaten $\overline{A'A} = f(a)$, $\overline{B'B} = f(b)$. Ich setze voraus, daß in dem Intervall zwischen a und b die Funktion $f(x)$ stetig, wachsend und positiv sei*).

*) Die Beweisführung wäre, von einigen unwesentlichen Abänderungen abgesehen, dieselbe, wenn die Funktion im Intervall beständig abnähme. Wäre sie teils zu-, teils abnehmend, so würde man das Intervall (a, b) in Teilintervalle zerlegen, und zwar so, daß in jedem einzelnen derselben die Funktion entweder immer zu-, oder immer abnehme; die Schlüsse, zu denen man gelangt, bleiben bestehen; ferner hat man nur die Bequemlichkeit der Beweisführung im Auge, wenn man die Funktion als positiv voraussetzt: diese Hypothese ist an sich gar nicht wesentlich.

Teilen wir die Strecke $A'B'$ in n gleiche oder ungleiche Teile, $A'M'_1$, $M'_1 M'_2$, $M'_2 M'_3$, ... In der Figur hat man $n = 7$ angenommen. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ die Abszissen der Einteilungspunkte $M'_1, M'_2, \ldots, M'_{n-1}$, so sind die Ordinaten der Punkte M_1, $M_2, \ldots, M_{n-1}$, wo die Kurve von den Parallelen $M'_1 M_1$, $M'_2 M_2$ ... $M'_{n-1} M_{n-1}$ geschnitten wird, gleich $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2), \ldots$, $y_{n-1} = f(x_{n-1})$. Die Fläche $S = ABA'B'$ wird durch diese Parallelen in n Streifen $S_0, S_1, S_2 \ldots, S_{n-1}$ geteilt, welche unten durch die x-Achse, oben durch die Kurve begrenzt werden; diesen Streifen entsprechen einbeschriebene Rechtecke $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ und umbeschriebene Rechtecke $P_0, P_1, \ldots P_{n-1}$; jeder Streifen liegt zwischen dem einbeschriebenen und dem umbeschriebenen Rechteck, die ihm entsprechen; man hat übrigens

$$S = S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1},$$

und wenn man annimmt

$$S'_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-1},$$
$$S''_n = P_0 + P_1 + \cdots + P_{n-1},$$

so liegt S zwischen S'_n und S''_n; Zweck nachstehender Erörterungen ist, einerseits den Fehler zu berechnen, den man begeht, wenn man für S' die eine oder die andere der Zahlen S'_n, S''_n nimmt; andrerseits möchte ich zeigen, daß, wenn man bei der vorhergehenden Einteilung n immer größere Werte annehmen läßt, mit der Beschränkung allerdings, daß bei unendlich wachsendem n der Abstand zweier beliebiger Einteilungspunkte unendlich klein werde, dieser Fehler unendlich klein wird, oder, was dasselbe ist, daß eine jede der mit n veränderlichen Zahlen S'_n, S''_n mit unendlich wachsendem n als Grenzwert die unveränderliche Zahl S hat.

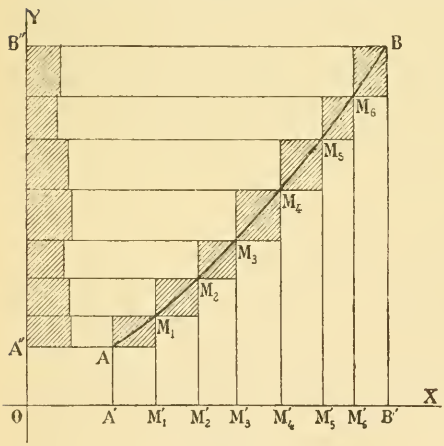


Fig. 172.

Der Fehler, den man begeht, wenn man an Stelle von S entweder die Summe S'_n der einbeschriebenen Rechtecke oder die Summe S''_n der umbeschriebenen Rechtecke setzt, ist augenscheinlich geringer als die Summe der kleinen schraffierten Rechtecke, von denen jedes gleich ist der Differenz zwischen einem umbeschriebenen und einem einbeschriebenen Rechteck. Um sich diese Summe leichter vorstellen zu können, hat man dieselben Rechtecke in eine andere Lage gebracht, die man dadurch erhält, daß man sie parallel mit der x-Achse verschiebt, so daß sie sich alle an die y-Achse anlehnen. Man sieht gleich, daß sie alle im Innern eines Rechtecks liegen, das als Höhe $A''B''$ und als Grundlinie die größte der Einteilungen $A'M'_1$, $M'_1M'_2$, $M'_2M'_3, \ldots$, die ich durch α_n bezeichne, hat. Die Maßzahl ihrer Summe ist mithin kleiner als $\overline{A''B''} \times \alpha_n$. Man hat übrigens

$$\overline{A''B''} = f(b) - f(a).$$

Mit unendlich wachsendem n ändern sich die Größen S'_n, S''_n, α_n: die letzte nähert sich 0 infolge der den sukzessiven Zerlegungsarten auferlegten Bedingung, daß die Entfernung der aufeinanderfolgenden Punkte unendlich abnimmt. Dasselbe ist der Fall für $\overline{A''B''} \times \alpha_n$, da $\overline{A''B''}$ konstant ist.

Folglich nähert sich der Fehler, den man begeht, indem man S durch S'_n oder S''_n ersetzt, mit unendlich wachsendem n dem Wert 0: oder, was dasselbe ist, die beiden veränderlichen Größen S'_n, S''_n haben mit stets wachsendem n als Grenzwert die unveränderliche Größe S.

328. Ersetzt man in dem Ausdruck S'_n, $p_0, p, \ldots, p_n$ durch ihre Werte, so erhält dieser Ausdruck die Form

$$\begin{aligned} S'_n = (x_1 - a)\,f(a) + (x_2 - x_1)\,f(x_1) + (x_3 - x_2)\,f(x_2) \\ + \cdots + (b - x_{n-1})\,f(x_{n-1}); \end{aligned}$$

seinen Grenzwert S stellt man gewöhnlich durch das Symbol

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

dar; die zweite Seite ist das, was man bestimmtes Integral nennt; das Zeichen $\int$, das darin vorkommt, ist ein verbildetes S, es ist der Anfangsbuchstabe des Wertes Summe; das Symbol dx wird gesetzt, um an die Differenzen

$$x_1 - a,\ x_2 - x_1,\ \ldots,\ b - x_{n-1}$$

zu erinnern, die in der ausführlichen Ausdrucksweise von S'_n vorkommen; a ist die *untere Grenze*, b die *obere Grenze* des Integrals. Ich mache darauf aufmerksam, daß, wenn $F(x)$ eine primitive Funktion von $f(x)$ ist, man nach Nr. 297 hat:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a);$$

die Anwendung dieser Formel ist gewöhnlich die beste Methode für die Berechnung der Grenze von S'_n. Noch eine Bemerkung: Ist $A'B'$ in n gleiche Teile geteilt und setzt man, um abzukürzen,

$$h = \frac{b-a}{n},$$

so hat man:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} h\Big[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f[a+(n-1)h]\Big]$$

oder auch:

$$\frac{S}{b-a} = \lim_{n=\infty} \frac{f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f[a+(n-1)h]}{n};$$

diese Formel führt uns dazu, die erste Zahl anzusehen als (der Definition gemäß) Mittelwert aller derjenigen Werte, welche die Funktion $f(x)$ annimmt, wenn x sich von a bis b ändert; dieser Begriff ist oft in den angewandten Wissenschaften von Nutzen.

§ 4. Reihen.

329. Zum Schluß möchte ich ein Wort über die *Reihen* sagen: es ist das ein Kapitel von der allerhöchsten Wichtigkeit, das ich aber nur flüchtig berühren werde.

Betrachten wir eine Dezimal-Zahl A, und nehmen wir an, der dezimale Teil habe eine unendliche Anzahl Stellen. Ist die Zahl A gegeben, ist sie z. B. $\frac{2}{7}$ oder $\sqrt{2}$, so kann man der Reihe nach den ganzen Teil α_0, dann die Ziffer α_1 der Zehntel, die Ziffer α_2 der Hundertstel, die Ziffer α_3 der Tausendstel usw. bestimmen; bleibt man z. B. bei der n-ten Dezimalstelle stehen, so ist die Zahl

$$S_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n}$$

ein Näherungswert von A mit einem Fehler, der geringer ist als $\frac{1}{10^n}$; die veränderliche Zahl S_n hat mit unendlich wachsendem n als Grenzwert die Zahl A. Man kann also schreiben:

$$A = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \cdots$$

und A als die Summe einer unendlichen Anzahl Zahlen ansehen, von denen jede (ausgenommen α_0) gleich ist dem Quotienten einer Ziffer des dezimalen Teiles von A und einer Potenz von 10, deren Exponent der Rang dieser Ziffer ist. Drückt man sich so aus, so ist das genau dasselbe, wie wenn man sagt, A sei der Grenzwert von S_n, wenn n über jede Grenze hinaus wächst.

In Nr. 187 ist gezeigt worden, daß 1 die Grenze der Summe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

ist, wenn n unendlich groß wird, und, allgemeiner gesprochen, daß, wenn man den absoluten Wert von x kleiner als 1 annimmt, $\frac{1}{1-x}$ die Grenze der Summe $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$ ist, wenn n unendlich groß wird.

330. Wenden wir uns nun dem allgemeinen Falle zu und betrachten wir eine unendliche Reihe von positiven oder negativen Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$; nehmen wir an, man könne ein jedes der Glieder u_n dieser Reihe berechnen, wenn man seinen Rang n kennt; bezeichnen wir durch S_n die Summe $u_1+u_2+\cdots+u_n$ der n ersten Glieder. Nähert sich nun S_n mit unendlich wachsendem n einem Grenzwerte A, so sagt man, die *Reihe*

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots,$$

in der die Punkte die ungeschriebenen Glieder der Reihe bezeichnen, sei *konvergent*, und ihre *Summe* sei A; man schreibt

$$A=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots.$$

Die Differenz $R_n=A-S_n$ nennt man den *Rest* der beim n-ten Glied abgebrochenen Reihe; es ist der Fehler, den man begeht, wenn man A durch S_n ersetzt.

Eben ist daran erinnert worden, daß, wenn der absolute Wert von x kleiner als 1 ist, die Reihe

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots$$

konvergent ist und als Summe $\frac{1}{1-x}$ hat. Der Beweis dieser Tatsache geht daraus hervor (Nr. 187), daß x^n sich der 0 nähert, wenn n unendlich groß wird, sowie aus der Identität

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}.$$

Dieselbe Identität zeigt uns, daß der Rest der beim n-ten Glied x^{n-1} abgebrochenen Reihe $\frac{x^n}{1-x}$ ist.

Ich beschränke mich darauf, die folgenden Resultate zu formulieren; sie werden sicher dem Leser durch ihre Einfachheit und ihre Schönheit auffallen. Für einen beliebigen Wert von x hat man

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} + \cdots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots.$$

Die zweiten Seiten sind Reihen, deren sukzessive Glieder das Gesetz befolgen, welches durch die geschriebenen Glieder sofort erkenntlich ist. Das Symbol $1\cdot 2\cdot 3\cdots n$ stellt das Produkt der n ersten ganzen Zahlen dar. Diese Produkte nehmen mit wachsendem n sehr schnell zu. Diese Reihen sind zwar konvergent für einen beliebigen Wert von x, aber sie konvergieren sehr schnell, wenn x klein ist; d. h., ihre ersten Glieder geben Werte, die sehr nahe an die Summe der Reihe herankommen. So ist für die erste, wenn man bei dem Gliede x^n stehen bleibt, der Rest kleiner an absolutem Werte als

$$\frac{x'^{\,n+1} e^{x'}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots (n+1)},$$

wenn x' den absoluten Wert von x bezeichnet. Für die zweite Reihe ist, wenn der absolute Wert von x kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, der Fehler kleiner als das erste unberücksichtigt bleibende Glied: dasselbe ist der Fall für die dritte, vorausgesetzt, daß man mindestens zwei Glieder der Reihe nehme.

X. Kapitel.

Elemente der Astronomie.

Die Astronomie, sagt Poincaré, hat unsere Seele befähigt, die Natur zu verstehen. Durch die Regelmäßigkeit der Bewegung der Sterne, durch die Sicherheit, mit der diese Bewegungen vorhergesehen werden konnten, entstand im menschlichen Geiste der Begriff der *Gesetzmäßigkeit.* Immerwährende, unermüdliche Beobachtungen und beständiges Nachdenken über dieselben vermittelten die genaue Kenntnis, die einfache und allgemeine Vorstellung dieser Bewegungen. Mit dieser Vorstellung, oder, wenn man so sagen will, mit dieser Erklärung der astronomischen Erscheinungen sind eng verbunden die Fortschritte der rationellen Mechanik, deren Prinzipien sämtliche physikalischen Theorien der Gegenwart beherrschen.

Zweifellos wurden die ersten Beobachtungen aus bloßer Neugierde gemacht. Die klare Luft und die schönen Nächte mancher Gegenden luden geradezu zu solchen Beobachtungen ein. Nach und nach kam den Menschen die Nützlichkeit dieser Beobachtungen zum Bewußtsein: sie lernten sich *orientieren*, ihren Weg wiederfinden, täglich die Zeit messen; sie lernten die Reihenfolge der Jahreszeiten und die zu den Feldarbeiten geeigneten Zeiten kennen. Die Fortschritte in diesen Kenntnissen sind allbekannt. Leicht zu handhabende Instrumente und einfache Rechnungen erlauben heutzutage dem Wanderer, den Punkt der Erdoberfläche, auf dem er sich befindet, zu bestimmen. Vervollkommnete Instrumente gestatten, die Zeit mit großer Genauigkeit zu bestimmen; der Kalender ist so praktisch eingerichtet, daß der Landmann nicht einmal ahnt, vor welch schwierige Probleme seine Vorfahren sich gestellt sahen; der unscheinbarste Kalender liefert ihm heutzutage deren Lösung.

Tägliche Bewegung. Wer sich an einem möglichst freien Platz so aufstellt, daß er zu seiner Linken die Richtung der aufgehenden Sonne, also Osten, vor sich die Richtung der Mittagssonne, also Süden hat, der hat zu seiner Rechten alsdann die Richtung der untergehenden Sonne, Westen, und hinter sich Norden. Mit hereinbrechender Nacht bedeckt sich der Himmel nach und nach mit Sternen. Auf den ersten Blick erscheinen diese Sterne unbeweglich; es bedarf jedoch nur einer kurzen Beobachtung, um zu erkennen, daß die Sterne bei unveränderter Stellung des Beobachters sich bewegen; neue Sterne sieht man zu seiner Linken aufgehen und sich über den Horizont erheben, während andere zu seiner Rechten sich immer mehr dem Horizonte nähern, um endlich unterzugehen. Verfolgt man genügend lang einen aufgehenden Stern, so sieht man ihn sich nach und nach immer mehr über dem Horizonte erheben, seinen Höhepunkt erreichen im Augenblicke, wo er gerade vor uns steht, um dann nach und nach wieder sich dem Horizonte zu nähern und unterzugehen. Schaut man nach Norden, so erblickt man andere Sterne, die weder auf- noch untergehen, die sich aber ebenfalls in bezug auf den Beobachter bewegen.

Bei dieser Bewegung behalten die *Sternbilder* oder Sterngruppen stets dieselbe Gestalt, nicht nur während einer Nacht, sondern von einer Nacht zu andern, von einem Jahrhundert zum andern. Die Sterne scheinen sich zu bewegen, als ob sie zusammen ein festes Gefüge bildeten. Ihre Gesamtbewegung ist eine Rotationsbewegung. Beugt sich der Beobachter, ohne aus der von Norden nach Süden laufenden Vertikalebene herauszutreten, so nach rückwärts, daß die Richtung seines Körpers mit dem Boden einen bestimmten Winkel macht, dann scheinen alle Sterne an einer großen Hohlkugel befestigt zu sein. Das Auge des Beobachters befindet sich im Mittelpunkt dieser Hohlkugel, die sich von links nach rechts um eine Achse dreht, deren Richtung mit derjenigen des rückwärts geneigten Körpers des Beobachters zusammenfällt. Man kann sich zwei gleich große, konzentrisch ineinander geschachtelte Hohlkugeln vorstellen, eine bewegliche und eine unbewegliche. Die mit den Sternen behaftete bewegliche gleitet längs der unbeweglichen. Diesen beiden Kugeln wollen wir den Namen Himmelskugeln geben. Die Achse, um die sich die bewegliche Kugel dreht, und in deren Richtung wir den Beobachter gestellt dachten, heißt *Weltachse*. Diese Achse durchschneidet die Himmelskugeln in zwei Punkten; der eine befindet sich ganz in der Nähe des *Polarsternes*, den man ja leicht mit Hilfe des Sternbildes des großen Bären finden kann. Dieser Punkt heißt der *Nordpol*, der andere, der sich für unsere Gegenden unter dem Horizonte befindet, der *Südpol* der Himmelskugel.

Dreht sich ein Körper um eine Achse, so bleiben nur die Punkte der Achse unbeweglich; alle andern Punkte beschreiben Kreise, deren Mittelpunkte auf der Achse liegen, und deren Ebenen auf der Achse senkrecht stehen. Die bewegliche Himmelskugel, deren Mittelpunkt auf der Achse liegt, gleitet auf der festen Himmelskugel; jeder Punkt der beweglichen Kugel, also jeder Stern beschreibt auf der festen Kugel einen Kreis, *Parallelkreis* genannt. Je näher der Stern an der Achse liegt, desto kleiner ist der Kreis. Der Halbmesser des Kreises ist gleich dem Abstande des Sternes von der Achse. Fiele der Polarstern genau mit dem Nordpol zusammen, so wäre er unbeweglich; auf den ersten Blick scheint das ja auch der Fall zu sein, da sein Parallelkreis sehr klein ist.

Diese Rotationsbewegung der Sterne ist der Typus der Regelmäßigkeit; in gleichen Zeiten beschreibt ein Stern auf seinem Parallelkreis gleiche Bogen und die Himmelskugel um ihre Achse gleiche Winkel. Die Zeit, innerhalb welcher eine vollständige Umdrehung der Himmelskugel stattfindet (d. h. innerhalb welcher sie ihre frühere Stellung in bezug auf die feste Himmelskugel einnimmt) heißt *Sterntag.* Der Sterntag ist ein bißchen kürzer wie der bürgerliche Tag; man teilt ihn in 24 Stunden Sternzeit, jede Stunde in 60 Minuten Sternzeit usw.

Denken wir uns den Beobachter in O; OZ sei die Vertikallinie, (d. h. die Richtung des Senkbleis) für diesen Ort. Die durch O geführte horizontale Ebene steht senkrecht auf OZ; für den Beobachter ist alles, was über dieser Ebene liegt, sichtbar, was drunter liegt, unsichtbar. AOB sei die Weltachse; bei der Betrachtung des Sternhimmels hatten wir ja den Beobachter an diese angelehnt gedacht. Diese Richtungen OZ und OB sind über der Horizontalebene. Die Richtung von den Füßen zum Kopfe des Beobachters ist die Richtung OB.

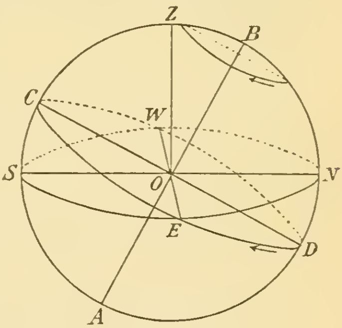


Fig. 173.

Zum bessern Verständnis der Figur sei bemerkt, daß OZ und OB in der Zeichenebene liegen; die durch O gelegte Horizontalebene steht senkrecht auf der Zeichenebene: ihre gemeinsame Schnittlinie ist NS. Die Richtung ON, die mit OB einen spitzen Winkel bildet, heißt nördliche Richtung; OS heißt südliche Richtung; nach dieser Seite blickt der Beobachter.

Zieht man durch den Punkt O die zu NS senkrechte Gerade EOW, so hat der Beobachter OE zu seiner Linken, OW zu seiner Rechten; die aus der Zeichenebene heraustretende Richtung OE heißt die östliche, OW die westliche Richtung.

Betrachten wir den Punkt O als Kugelmittelpunkt, so ist die zugehörige Kugel die oben erwähnte feste Himmelskugel, auf welcher die Sterne sich bewegen. Die Zeichenebene schneidet die Kugel in einem größten Kreise $SZBNA$; der Punkt Z heißt Zenith; der Punkt B Nordpol, der Punkt A Südpol. Jeder Stern beschreibt auf dieser Kugel einen *Parallelkreis*, dessen Ebene auf AB senkrecht steht und dessen Mittelpunkt auf AB liegt. Die Umdrehungsrichtung ist durch den beigezeichneten Pfeil angedeutet. Die Kugel und die Horizontalebene schneiden sich in einem Kreise, dessen eine Hälfte SEN aus der Zeichenebene heraustritt, während die andere SWN jenseits derselben liegt.

Anstatt die eben erwähnte Kugel als fest anzusehen, kann der Beobachter dieselbe auch als beweglich betrachten: sie dreht sich um AB und die Sterne bewegen sich mit ihr.

Die durch den Punkt O, senkrecht zu AB gelegte Ebene schneidet die Himmelskugel in einem größten Kreise: dem *Himmelsäquator*. Die Gerade EOW liegt in dieser Ebene. Die Punkte C und D dieses Kreises $ECWD$ liegen in der Zeichenebene Ein auf dem Äquator befindlicher Stern geht ganz genau im Osten E auf, erhebt sich über den Horizont, beschreibt den Viertelkreis EC, nähert sich dann wieder dem Horizont, indem er der den Viertelkreis CW durchläuft, um dann unterzugehen und für uns unsichtbar seinen Weg über WDE fortzusetzen.

Die durch die Weltachse gelegte Vertikalebene heißt *Meridianebene;* es ist die Zeichenebene der vorhergehenden Figur. Seinen höchsten Stand über dem Horizont erreicht ein Stern, wenn er, zur Südseite, durch diese Ebene hindurchgeht; die Schnittlinie der Ebene des Meridians mit derjenigen des Horizontes heißt die *Mittagslinie* dieses Ortes. In der Figur ist sie mit NS bezeichnet.

Die Beobachtung der Sterne gestattet die genaue Bestimmung der Weltachse und der Mittagslinie eines Ortes.

Es ist klar, daß diese Hohlkugel, an welcher die Sterne befestigt scheinen und in deren Mittelpunkt der Beobachter sich befindet, keine Realität besitzt. Die Sterne sind nicht alle gleichweit von uns entfernt. Sie sind nicht fest untereinander verbunden. Der Anblick der Sterne gibt uns bloß die Richtung an, in welcher wir sie sehen: würde ein Stern sich auf der Geraden, die ihn mit unserm Auge verbindet, bewegen, so würden wir das nicht bemerken. Um in einem gegebenen Augenblick die Richtung, in der wir einen Stern sehen, festzulegen, wollen wir unser Auge als Mittelpunkt einer Kugel betrachten: auf dieser Kugel bestimmen wir den Schnittpunkt mit dem Sehstrahl; ersetzen wir nun den wirklichen Stern durch diesen Punkt, so ist die Perspektive nicht geändert, das Bild ist genau dasselbe wie vordem. Ersetzen wir auf diese Weise alle Sterne durch Punkte auf der Kugel, und denken wir uns diese Kugel um die oben erwähnte Achse drehbar, so wird das Schaubild genau der Wirklichkeit entsprechen.

Handelt es sich um einen einzelnen Beobachter mit unveränderlicher Stellung, so ist die Länge des Radius der festen und der beweglichen Himmelskugel willkürlich: wir können denselben, im Vergleich zu den uns umgebenden Gegenständen, als unendlich groß ansehen und uns diese Kugel als reell vorstellen, als jenes „Himmelsgewölbe", das wir zu sehen glauben*); wir dürfen uns jedoch durch diese Vorstellung nicht täuschen lassen.

Die Beobachtung hat gezeigt, daß die Weltachse stets dieselbe Richtung hat, daß letztere also von der Stellung des Beobachters unabhängig ist; übrigens sind die Sehstrahlen von verschiedenen Orten der Erde nach einem und demselben Stern parallel. Das oben erwähnte Bild, durch das man sich nicht täuschen lassen darf, leistet uns nun gute Dienste. Wir wollen uns die bewegliche Himmelskugel, an der wir die Sterne befestigt gedacht, so groß vorstellen, daß die Erde, die im Kugelmittelpunkt sich befindet, so klein wird, daß wir jeden ihrer Punkte mit dem Kugelmittelpunkte identifizieren können. Die Horizontalebene jedoch ändert ihre Richtung von einem Ort zum andern, und dieselben Sterne werden nicht überall sichtbar sein. Da wir die Erde durch einen Punkt dargestellt denken, müssen wir die Weltachsen für verschiedene Orte als zusammenfallend annehmen.

Die scheinbare Bewegung der Sterne können wir uns jetzt auf sehr einfache Weise vorstellen. Die Sterne sind an einer sehr großen Kugel befestigt, die sich in gleichförmiger Bewegung um eine feste Achse dreht.

Auf dieser Kugel denken wir uns ein dem in Nr. 226 (Fig. 84, 85) beschriebenen analoges Koordinatensystem angebracht; der Durchmesser PQ wird durch die Weltachse AB ersetzt. Die beiden Koordinaten eines Sternes können als seine beiden Namen angesehen werden. Übrigens haben die schönsten Sterne und die von ihnen gebildeten Gruppen eigene Namen erhalten: sie können als Ausgangspunkte auf der Himmelskugel dienen; spricht man von einem Punkt der Himmelskugel im großen Bären zwischen bestimmten Sternen dieser Gruppe, so ist diese Ausdrucksweise sofort verständlich.

---

*) Eigentlich sieht man ein gedrücktes Gewölbe.

Die Bewegungen einzelner Sterne sind jedoch viel verwickelter: es sind dies die *Sonne*, der *Mond* und die *Planeten*. Von den letzteren sind einige so helleuchtend und schön, daß sie uns förmlich zwingen, sie zu beobachten. Auf den ersten Blick unterscheiden sie sich wenig von den übrigen Sternen; in einer und derselben Nacht, wenigstens für einen ohne mit genauen Instrumenten versehenen Beobachter, ist ihre scheinbare Bewegung dieselbe wie diejenige der Sterne; beobachtet man sie jedoch mehrere Nächte hindurch, so erkennt man, daß sie ihre Stellung zu den ihnen benachbarten Sternen geändert haben; nach einigen Tagen haben sie ein Sternbild ganz verlassen und sind in ein andres eingetreten. Ein Beobachter, der seinen Standort nicht ändert, merkt bald, daß die Planeten nicht, wie die übrigen Sterne, immer an derselhen Stelle des Horizontes auf- und untergehen. Ferner erscheinen die Sterne auch bei starken Fernrohren stets nur als Punkte, während die Planeten als mehr oder minder große Scheiben erscheinen, sogar Einzelheiten auf ihrer Oberfläche sind bemerkbar. Die Untersuchung des von den Planeten ausgesandten Lichtes hat gezeigt, daß es *reflektiert* ist; die Sterne hingegen haben *eigenes* Licht.

Man kann sich die Bewegung der Sonne, des Mondes und der Planeten vorstellen durch die Annahme, daß sie auf der beweglichen Himmelskugel nicht wie die Sterne an einer und derselben Stelle bleiben, sondern sich langsam bewegen: während der Dauer eines Tages bleiben sie beinahe an derselben Stelle und beschreiben einen Parallelkreis auf der festen Himmelskugel; am nächsten Tage jedoch schon haben sie ihre Stelle ein wenig verändert; man drückt dies aus, indem man sagt, sie haben eine *Eigenbewegung*. Ihre scheinbare Bewegung setzt sich also zusammen aus der Umdrehung der Himmelskugel und aus ihrer Eigenbewegung auf dieser Kugel.

Abgesehen von der Sonne ist diese Eigenbewegung äußerst verwickelt. Die Sonne scheint auf der (beweglichen) Himmelskugel im Laufe eines Jahres einen größten Kreis zu beschreiben. Diese Bewegung bedingt die verschiedenen Jahreszeiten. Die Alten haben sie erkannt, indem sie mit großer Sorgfalt jeden Tag die Sterne notierten, in deren Nähe die Sonne auf- und unterging. Dieser größte Kreis, den die Sonne auf diese Weise in einem Jahre auf der beweglichen Kugel beschreibt, heißt *Ekliptik*.

Die Planeten und der Mond scheinen sich in einem die Ekliptik ziemlich eng umgebenden Gürtel, der *Tierkreiszone* (Zodiakus), zu bewegen. Die in dieser Zone liegenden Sternbilder sind die Sternbilder des Tierkreises.

Kopernikanisches Weltsystem. Vereinfachte Keplersche Gesetze.*) Die scheinbare Bewegung des Mondes und der Planeten erscheint uns so sehr verwickelt, weil unser Beobachtungsort schlecht gewählt ist. Könnten wir diese Bewegungen von der Sonne aus beobachten, so erschienen sie, wenigstens im ersten Augenblick, als sehr einfach.

Stellen wir uns vor, eine solche Beobachtung sei möglich; der Beobachter möge sich im Mittelpunkte der Sonne befinden.

Die Sterne scheinen auch jetzt noch sehr weit entfernt zu sein; bloß sind sie unbeweglich. Die Gestalt der Sternbilder ist dieselbe wie früher.

Die Himmelskugel, an der die Sterne befestigt zu sein schienen, und die von der Erde ausgesehen beweglich war, ist jetzt unbeweglich.

Die großen Planeten, zu denen auch die Erde gehört, gruppieren sich um die Sonne in folgender Reihenfolge: Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun. — Betrachtet man sie durch ein Fernrohr, so erscheint jeder Planet als kleine Kugel. Zwischen Mars und Jupiter befinden sich noch eine große Anzahl kleiner Planeten. Die Entfernung von uns bis zum nächsten Stern ist mehrere tausend mal größer als die Entfernung von uns zum Neptun. Die Sonne und die Planeten bilden zusammen ein System, das sehr weit von den Sternen entfernt ist.

Die Planeten bewegen sich alle beinahe in einer und derselben Ebene. Um die Betrachtungsweise zu vereinfachen, wollen wir annehmen, daß alle Planeten sich genau in einer Ebene (E) bewegen. Diese Ebene teilt den Raum in zwei Hälften, die wir kurz die obere und die untere nennen wollen.

Der im Mittelpunkt der Sonne befindliche Beobachter möge auf der Ebene (E) aufrecht stehen: er sieht dann, wie alle Planeten in der Ebene (E) sich kreisförmig um die Sonne bewegen. Alle Planeten drehen sich in derselben Richtung um die Sonne. Je nach der Stellung des Beobachters drehen sich die Planeten von rechts nach links oder von links nach rechts. Wir wollen nun ein für allemal annehmen, er befände sich auf derjenigen Seite der Ebene, auf welcher er die

*) Das Wesentliche am kopernikanischen Weltsystem besteht in der Annahme, daß die Sonne fest steht, der kreisförmigen Bewegung der Planeten um die Sonne und der Umdrehung der Erde um ihre eigene Achse. Die vereinfachten, angenäherten Gesetze der Bewegungen der Planeten, die ich in kurzen Worten erläutern will, sind die Keplerschen Gesetze. Um ihre Darstellung einfacher zu gestalten, habe ich eine kreisförmige und nicht eine elliptische Bahn angenommen.

Planeten von rechts nach links sich bewegen sieht: diese Seite wollen wir die *obere* nennen.

Jeder Planet beschreibt seinen Kreis mit gleichförmiger Bewegung, das heißt, in gleichen Zeiten durchläuft er die gleiche Anzahl Grade.

Die Geschwindigkeit der Bewegung ist für jeden Planeten durch ein einfaches Gesetz bestimmt: bei beliebig gewählter Zeit- und Längeneinheit wird das Quadrat der Umlaufszeit, dividiert durch den Kubus des Kreisradius, für alle Planeten stets denselben Quotienten k geben. Nimmt man beispielsweise die Entfernung der Erde zur Sonne als Längen- und das Jahr als Zeiteinheit, so kann man sagen, daß das Quadrat der Umlaufszeit gleich ist dem Kubus des Radius der Bahn des betreffenden Planeten.

Diese verschiedenen, allerdings nur angenäherten Gesetze zeigen uns klar, daß Sonne und Planeten zusammen ein Ganzes, ein *System* bilden, dessen einzelne Teile voneinander abhängig sind: der Gedanke an einen gemeinsamen Ursprung dieser Teile drängt sich uns so ganz natürlich auf.

Nehmen wir diese Gesetze als exakt an, so können wir leicht folgende Aufgabe lösen:

Wo befindet sich in einem gegebenen Augenblicke ein bestimmter Planet?

Die Ebene (E) der Planetenbahnen möge durch die Zeichenebene dargestellt sein; S sei der Sonnenmittelpunkt. Für den auf der oberen Seite der Ebene befindlichen Beobachter wird der Planet P sich in der Richtung des Pfeiles auf einem Kreise bewegen. Dieser Kreis (oder die Planetenbahn) ist vollständig bestimmt, sobald sein Radius bekannt ist. Überdies nehmen wir noch den Ort A des Planeten für eine bestimmte Zeit als bekannt an. Mit Hilfe der Zahl k ist es nun leicht, die von dem Planeten in der Zeiteinheit durchlaufene Anzahl von Graden zu berechnen, das heißt, den Ort des Planeten für einen beliebigen Zeitpunkt zu bestimmen. Dieselbe Lösung kann auf alle Planeten angewandt werden, und der im Punkte S befindliche Beobachter weiß, wo sich in jedem Augenblick die Erde und alle anderen Planeten befinden. Er kann in jedem Augenblick eine Zeichnung herstellen, in welcher die Stellungen der einzelnen Planeten genau vermerkt sind.

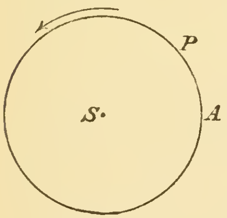


Fig. 174.

Der Einfachheit halber haben wir bis jetzt die Planeten als Punkte angesehen: diese Voraussetzung ist ganz berechtigt, so klein sind die Planeten in bezug auf ihre Entfernungen zur Sonne. Der

Radius der Erdkugel ist noch nicht $\frac{1}{20000}$ der Entfernung der Erde zur Sonne.

Der Anschaulichkeit halber wollen wir uns auf dem Boden eines großen Saales das Planetensystem bildlich darstellen, das heißt, die Planetenbahnen und die Planeten selbst, jedoch unter Beibehaltung der Größenverhältnisse. Die Erdbahn möge durch einen Kreis von einem Meter Radius dargestellt sein; die Erde selbst ist dann ein noch kaum sichtbarer Punkt, dessen Durchmesser kleiner als $\frac{1}{10}$ Millimeter ist. Der Radius der Sonne ist ungefähr 109 mal größer wie der Radius der Erde; sie wäre dargestellt durch eine Kugel von nicht ganz 1 Zentimeter Durchmesser. Neptun, der äußerste der Planeten würde sich auf einem Kreise von ungefähr 30 Meter Radius bewegen. Den unserem System am nächsten kommenden Stern müßte man sich unter Beibehaltung des Maßstabes als Kugel von ungefähr derselben Größe wie die Sonne vorstellen, und zwar in einer Entfernung von mehr als 200 Kilometer. Wollte man von irgendeinem Punkte des Saalbodens nach diesem Sterne Gerade ziehen, so würden dieselben natürlich alle parallel zu sein scheinen; die tatsächlichen Beobachtungen, die mit bewunderungswürdiger Genauigkeit ausgeführt wurden, haben gezeigt, daß diese Geraden nicht genau parallel sind: auf diese Weise konnte man die Entfernung einiger Sterne von der Sonne annähernd berechnen.

Von jetzt ab wollen wir die Planeten nicht mehr als bloße Punkte betrachten. Wir wollen uns den Beobachter in den Mittelpunkt eines der Planeten, z. B. der Erde (die durchsichtig sein soll) denken. Die Fixsterne sind so weit entfernt, daß ein Sehstrahl vom Beobachter zum Stern stets dieselbe Richtung beibehält, das heißt bei der Umdrehung der Erde um die Sonne stets sich selbst parallel bleibt. Ebenso verhält es sich für die verschiedenen Punkte der Erde und speziell für ihren Mittelpunkt mit den Parallelen zur Weltachse: letztere Parallele heißt die Erdachse. Diese Achse schneidet die Erdoberfläche in zwei Punkten: der eine, Nordpol genannt, bleibt stets oberhalb der Ebene (E), der andere, Südpol genannt, stets unterhalb. Die Erdachse steht nicht senkrecht auf der Ebene (E); sie bildet mit dem Ebenenlot einen Winkel, der kleiner als 30^0 ist.

Denken wir uns den im Erdmittelpunkt befindlichen Beobachter so gestellt, daß sein Kopf dem Nordpol und seine Füße dem Südpol zugewendet sind. Betrachtet er stets denselben Stern, so erleidet er eine Translationsbewegung. Die Erde wird sich von rechts nach links um ihn drehen; zu einer vollständigen Drehung braucht sie einen Sterntag. Der Beobachter selbst beschreibt um die Sonne in einem Jahre einen Kreis.

Diese Umdrehung der Erde um ihre eigene Achse erklärt die scheinbare tägliche Bewegung, von der wir oben gesprochen. Ob die Sterne fest sind und die Erde sich von rechts nach links dreht, oder ob die Erde fest ist und die Sterne sich von links nach rechts drehen, die Himmelserscheinungen bleiben dieselben. Die Umdrehung der Erde um die Sonne erklärt ebenfalls die scheinbare Bewegung der Sonne auf der Himmelskugel. Die verwickelte scheinbare Bewegung der Planeten erklärt sich aus der Umdrehung der Erde um sich selbst und um die Sonne und aus der Umdrehung der Planeten um die Sonne. Die meisten Planeten haben Trabanten oder *Monde*. Die Erde hat einen Trabanten. Der Beobachter sähe den Mond von rechts nach links einen Kreis um die Erde beschreiben, in einer Ebene, die wenig von der Ebene (E) abweicht. Der Mond ist eine von der Sonne beschienene Kugel; nur der von der Sonne beleuchtete Teil der uns zugewandten Halbkugel ist für uns sichtbar: hieraus erklären sich die *Mondphasen*.

Die vorhergehende Beschreibung ist nur eine erste Annäherung: sie soll dem Leser einen ersten, ungefähren Begriff von der Gesamtheit der Bewegungen des Sonnensystems geben.

Die gröbste Unrichtigkeit dieser Beschreibung besteht in der Annahme, daß die Bahnen sämtlicher Planeten und auch der Erde in einer und derselben Ebene liegen: wenn dem so wäre, so müßte diese Ebene die Himmelskugel in einem größten Kreise schneiden, und Sonne und Planeten schienen, von der Erde aus gesehen, stets auf diesem Kreise sich zu bewegen. Wir haben jedoch schon vorhin gesagt, daß das nicht der Fall ist, sondern, daß die Planeten von einem gegebenen größten Kreise ein wenig abweichen. Die Bahnen der Planeten liegen in verschiedenen Ebenen, die jedoch wenig voneinander abweichen. Wir wollen etwas näher darauf eingehen.

Da in bezug auf ihre gegenseitigen Entfernungen Sonne, Erde und Planeten sehr klein sind, wollen wir sie für einen Augenblick wieder als Punkte ansehen.

Die Bahnen der einzelnen Planeten bilden Ebenen, die mehr oder weniger genau durch die Sonne hindurchgehen; auch drehen alle Planeten sich in derselben Richtung um die Sonne.

Errichtet man auf der Ebene der Erdbahn eine Senkrechte und konstruiert man Ebenen, die durch diese Senkrechte und die verschiedenen Planeten hindurchgehen, so drehen sich alle diese Ebenen um die Senkrechte, und zwar in derselben Richtung. Die Ebenen der Planetenbahnen (die alle durch die Sonne gehen) sind ein wenig gegen die Ebene der Erdbahn geneigt. Dieser Winkel erreicht 7^0 und 3^0 für Merkur und Venus; für die großen Planeten ist er viel kleiner.

Diejenige Richtung der vorhin erwähnten Senkrechten, die so beschaffen ist, daß ein in ihr liegender Beobachter alle Umdrehungen von rechts nach links sich vollziehen sieht, wollen wir als die *obere* bezeichnen.

Jeder Planet beschreibt in gleichmäßiger Bewegung ungefähr einen Kreis, in dessen Mittelpunkt sich die Sonne befindet. Die Geschwindigkeit dieser Bewegung ist oben kurz erläutert worden.

Die Keplerschen Gesetze liefern jedoch eine viel bessere Annäherung; ehe wir sie aufstellen, wollen wir uns einige Eigenschaften der Ellipse ins Gedächtnis zurückrufen.

Ellipse. — In einer Ebene sind 2 Punkte F und F' gegeben: dann ist eine *Ellipse*, mit diesen beiden Punkten als *Brennpunkte*, der Ort aller Punkte M der Ebene, die so beschaffen sind, daß $MF + MF'$ konstant ist.

Es soll $MF + MF'$ mit 2a und FF' mit 2c bezeichnet werden.

Um die Ellipse zu zeichnen, kann man in den Punkten F, F' die Enden eines Fadens von der Länge 2a befestigen; dann spanne man den Faden mittels eines Schreibstiftes, dessen Spitze, auf der Zeichenfläche herumgeführt, die Kurve beschreibt, die eine ovale Form hat; dieses Oval ist um so flacher, je mehr die Entfernung 2c der Brennpunkte der Entfernung 2a gleich wird; es nähert sich hingegen einem Kreise, wenn die beiden Brennpunkte nahe beieinander liegen; es wird ein Kreis, wenn sie zusammenfallen: der Kreis ist also ein Spezialfall der Ellipse.

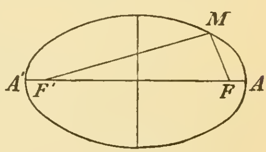


Fig. 175.

Die Ellipse hat 2 Symmetrieachsen (Nr. 165): die eine AA' geht durch die Brennpunkte; sie heißt die *große Achse* der Kurve; die Länge AA' der großen Achse ist gleich 2a, wie man sich leicht überzeugen kann. Das Verhältnis $\frac{c}{a}$, das man oft mit e bezeichnet, heißt die *numerische Exzentrizität* der Ellipse. Ist die Exzentrizität sehr klein, dann ist c sehr klein im Vergleich zu a, und die Ellipse nähert sich einem Kreise.

Die Keplerschen Gesetze.

Das *zweite* Keplersche Gesetz lautet:

Jeder Planet beschreibt eine Ellipse, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht.

Die Exzentrizitäten dieser verschiedenen Ellipsen sind sehr klein. Von den großen Planeten hat Merkur die größte Exzentrizität, nämlich 0,2. Wollte man die Merkurbahn auf einem Blatt Papier darstellen, und nähme man als mittlere Entfernung von der Sonne 1 Dezimeter, so könnte man diese Bahn kaum von einem Kreise mit einem Dezimeter Radius unterscheiden.

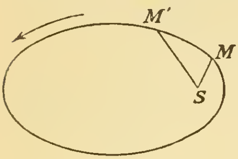


Fig. 176.

Nebenstehende Ellipse möge eine Planetenbahn darstellen. Die Sonne S ist einer ihrer Brennpunkte. Befindet der Beobachter sich oberhalb der Ebene, so bewegt der Planet sich in der durch den Pfeil angegebenen Richtung.

Befindet in einem gegebenen Augenblicke der Planet sich in M und kurze Zeit darauf in M', so beschreibt der Radiusvektor, der die Sonne mit dem Planeten verbindet, während dieser Zeit eine Fläche SMM', die von den beiden Strahlen SM, SM' und dem Bogen der Kurve MM' begrenzt wird.

Das *erste* Keplersche Gesetz lautet nun folgendermaßen:

Der von der Sonne nach den Planeten gezogene Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Ist die Exzentrizität Null, so wird die Ellipse ein Kreis, in dessen Mittelpunkt die Sonne steht; alle Radiusvektoren sind gleich; damit die vom Radiusvektor beschriebenen Flächen gleich seien, müßten die von ihm beschriebenen Mittelpunktswinkel gleich sein. Die Bewegung wäre alsdann eine gleichförmige: das ist das oben erwähnte, vereinfachte Keplersche Gesetz.

Das *dritte* Keplersche Gesetz endlich lautet:

Das Quadrat der Umlaufszeit eines Planeten, dividiert durch den Kubus der großen Achse seiner elliptischen Bahn, liefert einen für jeden Planeten gleichen Quotienten.

Wäre die Ellipse ein Kreis, so würde sich dieses dritte Gesetz ebenfalls auf das oben angeführte vereinfachte Gesetz reduzieren; die halbe große Achse der Ellipse wäre durch den Radius dieses Kreises zu ersetzen.

Das Problem, in jedem Augenblick die Stellung eines Planeten zu kennen, und dessen Lösung bei den vorhin angenommenen Vereinfachungen so leicht war, wird jetzt natürlich viel verwickelter.

Man muß nämlich die Lage der Bahnebene, dann die Bahn selbst in ihrer Ebene kennen, und endlich den Planeten in jedem Augenblick in seiner Bahn zu finden wissen. Die Zahlen, deren Kenntnis die Lage der Bahn und die Stellung des Planeten in seiner Bahn zu bestimmen gestatten, nennt man die *Elemente* des Planeten.

Auf eine genaue Definition dieser *Elemente* will ich verzichten, obwohl sie dem Leser keinerlei Schwierigkeiten böte.

Würde man die als genau angenommenen Keplerschen Gesetze als Ausgangspunkt für die Entwicklung der Lösung dieses Problems nehmen, so würde man kaum über die in dem vorliegenden Buche entwickelten Dinge hinauszugehen brauchen. Das Vorhergehende genügt, um den Leser von der Möglichkeit dieser Lösung zu überzeugen: er sieht ein, daß das Problem, sobald es gelöst ist, experimentell bestätigt werden kann; daß, umgekehrt, durch richtig geführte Beobachtungen die in der Lösung des Problems auftretenden numerischen Konstanten bestimmt werden können.

Die Lösung führt in der Tat auf Gleichungen, in denen die *Koordinaten* eines Planeten durch seine *Elemente* und die Zeit ausgedrückt sind. Diese Koordinaten bestimmen in jedem Augenblick den Ort des Planeten auf der beweglichen oder auf der festen Himmelskugel. Umgekehrt gestatten dieselben Gleichungen, aus einer genügenden Anzahl Beobachtungen die *Elemente* des Planeten zu berechnen.

Aus den Keplerschen Gesetzen hat Newton auf induktivem Wege ein sehr allgemeines Gesetz (*Gesetz der allgemeinen Gravitation*) abgeleitet; die Formulierung dieses Gesetzes ist höchst einfach. Die Berechnung der Bewegung der Sterne erscheint nach diesem Gesetz als ein rein mathematisches Problem: seine vollständige Lösung, die übrigens sehr schwer ist, fordert nur die Kenntnis einiger numerischer Konstanten, die der Beobachtung mehr oder weniger leicht zugänglich sind.

Ich verzichte auf die genaue Formulierung des Newtonschen Gesetzes, denn zum Verständnis der darin vorkommenden Größen müßte man in einem eigenen Kapitel die Grundlagen der rationellen Mechanik entwickeln.

Dem Newtonschen Gesetze zufolge sind die Keplerschen Gesetze bloß angenähert. Mit Hilfe von übrigens sehr komplizierten Rechnungen kann man aus dem Newtonschen Gesetze die Bewegungen der Sterne mit einer Genauigkeit bestimmen, die wenigstens so groß ist wie die genauesten Beobachtungen: mit Hilfe dieses Gesetzes haben unter anderm Adams und Leverrier (unabhängig voneinander) die Existenz und den Ort des Planeten Neptun bestimmt.

Ich will noch bemerken, daß die in dem Vorhergehenden der Sonne und den Sternen zugeschriebene Unbeweglichkeit nur eine scheinbare ist. Auf lange Zeiträume ausgedehnte Beobachtungen haben ergeben, daß die Sonne und die Planeten als ein Ganzes eine bis jetzt noch nicht genauer zu bestimmende Bewegung ausführen.

Die Entwicklung der aus dem Newtonschen Gesetze sich ergebenden mathematischen Schlußfolgerungen, die durch dasselbe erhaltenen Vereinfachungen der Rechnungen waren, sind heute und werden noch lange Zeit der Gegenstand der Arbeiten der größten Mathematiker sein.

Bis um die Mitte des XIX. Jahrhunderts beschäftigten sich die Mathematiker hauptsächlich mit dem Studium der scheinbaren Bewegungen der Sterne; sie gelangten zur genaueren Kenntnis der Gesetze, welche die Translationsbewegungen der Planeten und Kometen um die Sonne, die Bewegung der Satelliten um ihre Planeten und die Rotationsbewegungen der Sonne und der Planeten um ihre eigene Achse beherrschen. Die letztere Bewegung der Erde erzeugt die scheinbare tägliche Bewegung der Himmelskugel.

Die ersten Versuche, die Beschaffenheit der Sterne zu erforschen, beziehen sich jedenfalls auf die Sonne, deren regelmäßig veränderliche Flecken seit zwei Jahrhunderten den Gegenstand zahlreicher Beobachtungen bilden. Das Studium über die Zusammensetzung des von den verschiedenen Sternen ausgestrahlten Lichtes hat uns über die Beschaffenheit eines jeden genauen Aufschluß gegeben.

Man konnte feststellen, daß die Sonne aus einer leuchtenden Kugel, der *Photosphäre*, besteht, die eine sehr hohe Temperatur besitzt. Dieselbe ist umgeben von einer dünnen, gasförmigen Hülle, der *Chromosphäre*, die häufig von gewaltigen Ausbrüchen glühender Dämpfe, den *Protuberanzen*, durchbrochen wird, und einer zweiten viel ausgedehnteren Hülle, der *Krone*, die bei totalen Finsternissen sichtbar wird; Form und Ausdehnung dieser letzteren ändern in bestimmten Perioden, die mit denen der Sonnenflecken in Zusammenhang stehen. Die spektroskopischen Untersuchungen der Planeten ließen die Beschaffenheit der sie umhüllenden Atmosphären erkennen; die der Sterne hat deren Einteilung in bestimmte Typen ermöglicht und plausible Induktionsschlüsse über ihren frühern Zustand und ihre Zukunft gestattet. Sie gab ein untrügliches Unterscheidungsmerkmal für Nebelflecken und Sternhaufen. Die im Laufe des XIX. Jahrhunderts angestellten Untersuchungen über die Eigenbewegungen der Sterne, über ihre Entfernungen zur Sonne, über ihre Helligkeit und deren Variationen bei vielen Sternen, über die relativen Bewegungen der doppel- oder mehrfachen Systeme haben zu Fragestellungen geführt, deren

Lösung im XX. Jahrhundert durch die Anwendung der Photographie außergewöhnlich beschleunigt wurde. Die Anwendung der Photographie bei den astronomischen Beobachtungen hat die Zahl der Sterne ins Hundertfache gesteigert und die Präzision der Beobachtungen verdoppelt oder verdreifacht.

Um über das erste Stadium, das der geduldigen Beobachtungen mit bloßem Auge, deren Präzision auf 2 bis 3 Bogenminuten begrenzt war, hinauszukommen, bedurfte die Astronomie mehrerer Jahrtausende. Die Entdeckung der Fernrohre, um 1610, bildet den Anfang eines zweiten Stadiums, das $2\frac{1}{2}$ Jahrhunderte gedauert hat. In dieser Zeit steigerte sich die Präzision der Beobachtungen bis zur Bogensekunde, und die Denker stellten die ersten Fragen über die Beschaffenheit der Sterne und den Bau des Weltalls. Die Entdeckung der Spektroskopie in der zweiten Hälfte des XIX. Jahrhunderts bildet den Anfang einer dritten Periode; auf einige der vorhin gestellten Fragen konnte genaue Antwort gegeben werden. Seit 15 Jahren hat die Photographie die Beobachtungen gänzlich umgestaltet. Und ihre ersten Resultate sind so ausgefallen, daß selbst Astronomen im reifen Alter noch die Hoffnung hegen, daß das wohl organisierte Zusammenwirken sämtlicher Observatorien den Glücklichsten unter ihnen vielleicht noch gestatten wird, Aufschluß zu erhalten über das Wesen der Milchstraße, der Sternhaufen und Nebelflecken im Weltall; etwas zu erfahren über die Natur der Sonne inmitten der Sterne; Kenntnis zu erhalten über die Geschichte des Weltalls, über seine Vergangenheit und über seine Zukunft.

Das Studium der uns benachbarten Gestirne ist eine bescheidenere, aber darum nicht minder bezaubernde Aufgabe. Die Beobachtung des Mondes hat eine Geographie, ja selbst eine Geologie des Mondes zutage gefördert; ähnliche Untersuchungen über die der Erde am nächsten Planeten haben bereits begonnen.*)

*) Ich will es nicht unterlassen, an dieser Stelle Herrn B. Baillaud, der die Liebenswürdigkeit hatte, die beiden letzten Seiten zu redigieren und das ganze Kapitel durchzusehen, meinen besten Dank auszusprechen.

Geschichtlicher Anhang.

I.

Ursprung der Algebra.

Beispiele für den Gebrauch willkürlich gewählter Buchstaben zur Bezeichnung von Größen (oder überhaupt von Denkobjekten) findet man schon zahlreich in den Schriften des Aristoteles. Doch wird jedes Produkt einer Operation durch einen neuen Buchstaben bezeichnet, so daß dieser Symbolismus wohl zu einer vom Werte der verschiedenen Größen unabhängigen Beweisführung dienen kann, aber für das Rechnen nutzlos ist, was ihn fast aller Vorteile der Algebra beraubt.

Der operatorische Symbolismus entwickelte sich ganz für sich: bis zum Ende des 16. Jahrhunderts bleibt er ausschließlich auf die numerischen Gleichungen mit einer einzigen Unbekannten beschränkt. Über den Zustand dieses Symbolismus bei den Griechen um das 3. Jahrhundert nach Christus gibt uns das Werk des Diophantes genügend Aufschluß; daß er schon vor diesem Schriftsteller existierte, steht fest; nur wissen wir nichts Genaues darüber. Man glaubt ihn, auf unsichere Wahrzeichen hin, bis auf Pythagoras zurückführen zu können; andrerseits findet man aber schon rohe Spuren von Bezeichnungsweisen in dem ältesten bekannten mathematischen Dokument, dem ägyptischen Papyrus Rhind (*Handbuch des Ahmes,* um das 14. Jahrhundert vor Christus).

Diophantes bezeichnet die Unbekannte und ihre verschiedenen Potenzen bis zur sechsten, sowie deren umgekehrte Werte und auch die Einheit, durch Abkürzungen ihrer griechischen Namen. Auf das Symbol einer jeden *Gattung* ($\varepsilon\tilde{\iota}\delta o\varsigma$, *species*) folgt der numerische Koeffizient. In jedem Polynom werden die additiven Glieder einfach ihrer Rangordnung nach, nebeneinander aufgeführt, desgleichen die negativen Glieder, welche durch das Subtraktionszeichen (↑ oder ⥉, Abkürzung von $\lambda\iota\pi\acute{o}\nu\tau[\varepsilon\varsigma]$, zurücklassend) mit den vorausgehenden additiven Gliedern verbunden sind. So würde man nach einer lateinischen, derjenigen des Diophantes genau nachgebildeten Bezeichnungsweise, den Ausdruck

$$(1) \qquad x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$$

folgendermaßen schreiben:

$$(2) \qquad CC1QQ15Q15U1 - QC6C20N6.$$

Andre Abkürzungen stehen für das Gleichheitszeichen, das Wurzelzeichen, oder bezeichnen vorübergehend, bis zur Bildung der definitiven Gleichung, entweder die Unbestimmten, mit denen Diophantes in der Mehrheit seiner Probleme operiert, oder die verschiedenen Unbekannten, wenn sie in größerer Anzahl vorhanden sind.

Auch die Regeln über die Multiplikation der Polynome, einschließlich der Vorzeichenregel, sind ihm wohl bekannt.

Bei den Arabern hat sich der operatorische Symbolismus kaum weiter entwickelt; im Gegenteil, die Wörter, welche die Griechen abkürzten, schreiben sie gewöhnlich ganz aus. Wir verdanken ihnen jedoch den wagerechten Strich als Divisionszeichen (wenigstens bei den numerischen Brüchen). Diophantes setzte den Nenner immer über den Zähler, während die Byzantiner ihn als Exponenten figurieren ließen.

Bekanntlich haben die Araber auch der Algebra den Namen gegeben; in Wirklichkeit nannten sie dieselbe *al-djebr ou'al moukabalah;* und dieser Ausdruck bezeichnet eigentlich zwei Operationen, die Diophantes vorschreibt, um die Gleichungen in eine kanonische Form zu bringen; die *djebr* bestand darin, daß man alle negativen Glieder von einer Seite auf die andre versetzte, um auf jeder Seite nur positive Glieder zu haben; die *moukabalah* darin, daß man dann von jeder Seite das kleinste von zwei ähnlichen Gliedern auf der einen und der andern Seite abzieht, um nur höchstens mehr ein Glied jeder Gattung auf der einen oder auf der andern Seite zu haben.

Die Schriften des Mohammed Al-Khouarizmi (daher das Wort *algorithmus*, zuerst Bezeichnung des Systems der arabischen Ziffern), des ersten Autors einer Algebra im 9. Jahrhundert, wurden im lateinischen Westen zuerst bekannt im 12. Jahrhundert, und zwar durch die lateinischen Bearbeitungen des Atelhart von Bath und des Gerhard von Cremona. Nach und nach, ohne das Abkürzungssystem der Griechen zu kennen, kam man natürlich in verschiedenen Formen für die Grundrechnungsarten und die Wurzelzeichen darauf zurück. Die jetzige Form des Zeichens — scheint aus dem 13. Jahrhundert zu stammen; doch ist der Ursprung desselben unbekannt: der Gebrauch des $+$ Zeichens (wahrscheinlich an Stelle von *et*), welches die jetzige Art und Weise des Aneinanderreihens sowie das Weglassen des speziellen Einheitszeichens ermöglichte, soll bis ins 14. Jahrhundert reichen und sich zuerst in Deutschland um das 16. Jahrhundert verbreitet haben. Doch gebrauchten die italienischen Algebristen noch lange die Anfangsbuchstaben $\bar{p}$, $\bar{m}$.

Das Gleichheitszeichen wurde von dem Engländer Recorde im Jahre 1556 vorgeschlagen: seine allgemeine Anerkennung verdankt es dem Umstand, daß Wallis und Newton es annahmen. Vieta und Fermat gebrauchten einfachhin die Abkürzung *aeq.*; Descartes das Zeichen ∞, das aus dieser Abkürzung entstanden ist. Nach ihm findet man in Frankreich häufig die beiden Parallelstriche, nur sind sie vertikal; das Symbol $=$ bezeichnet hingegen bei Vieta die Subtraktion, und zwar in dem Falle, wo es nicht feststeht, in welcher Richtung operiert werden muß, um ein positives Resultat zu erlangen: bei Descartes hat dieses Zeichen dieselbe Bedeutung, wie unser $\pm$.

Der Exponent in seiner jetzigen Gestalt wurde von Kartesius in seiner

Geometrie vom Jahre 1637 eingeführt. Doch ist dessen Ursprung viel älter, da der Begriff des Bruchexponenten sich schon in den Schriften des Nicole Oresme (im 14. Jahrhundert) und derjenige des negativen Exponenten im *Triparty* des Nicolas Chuquet (im 15. Jahrhundert) vorfindet. Um das Ende des 16. Jahrhunderts gebrauchten die holländischen Algebristen zur Bezeichnung der sukzessiven Potenzen der Unbekannten die den Grad angebende Ziffer im Mittelpunkt eines kleinen Kreises. Bombelli (1572) hatte diese Ziffer einfach über einen kleinen Bogen gesetzt. Vieta behält zwar die denjenigen des Diophantes nachgebildeten Ausdrucksweisen noch bei; doch erscheint der mit *römischen Ziffern* geschriebene Exponent schon um 1636 in einem Werke, das seiner Schule angehört, und das der Schotte Hume in französischer Sprache verfaßt hat.

Der Gebrauch von Ziffern zur Bezeichnung der Wurzeln ist später anzusetzen. Descartes schreibt immer $\sqrt{}$ für die Quadrat-, und $\sqrt{C}$ für die Kubikwurzel. Der Ursprung des Wurzelzeichens ist in einer Umwandlung der vorherigen Abkürzungen zu suchen, sei es nun R (*radix,* Übersetzung aus dem Arabischen), oder L (*latus,* Seite, entsprechend dem griechischen Wort πλευρά, das schon Diophantes zu $\overset{\lambda}{\pi}$ verkürzte).*)

Die Klammern haben sich nur langsam einbürgern können; in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts gebraucht man vorzugsweise horizontale Striche über dem Polynom (wie noch heute bei den Wurzeln), oder Akkoladen, welche untereinandergeschriebene Glieder zusammenfassen.

Die Multiplikations- und Divisionszeichen, $\times$ (Oughtred) und : (Leibniz), tauchen auch erst nach der eigentlichen Schöpfung der modernen Algebra auf.

Der Ruhm dieser Schöpfung kommt unstreitig dem Franz Vieta zu. Er war der erste, welcher die geniale Idee hatte, den zur Erleichterung der Lösung besonderer numerischer Fragen eingeführten operatorischen Symbolismus auf Buchstaben, die Größen bezeichneten, anzuwenden; er verstand es übrigens auch, diese Idee systematisch zu entwickeln; und wenn er auch auf einem relativ beschränkten Gebiete blieb, sah er doch voraus, daß dieses Gebiet sich unendlich erweitern ließe. Das Ziel dieser Ausdehnung formulierte er in den stolzen Worten: *Nullum non solvere problema.*

Es sei noch bemerkt, daß Vieta das Wort *Algebra* als barbarisch verwarf, und dafür *Analysis* einführte; diese Neuerung konnte den schon eingewurzelten Gebrauch des ersten Wortes nicht verdrängen; aber eine Folge davon war das Eindringen der Wörter *Analysis* und *analytisch* in die moderne mathematische Sprache und andere Wissenszweige. Und was ist auch schließlich die Infinitesimalanalysis anders als eine weitere Entwickelung des operatorischen Symbolismus? Und die analytische Geometrie? Sie besteht doch im Grunde in der systematischen Anwendung der Analysierungsmethode des Vieta auf geometrische Probleme. Und Vieta, der diese Methode in ihren

*) Die Frage bleibt ungelöst. Jedenfalls taucht die jetzige Form $\sqrt{}$ zuerst in einer deutschen Schrift auf, in der *Coss* des Christoff Rudolff (1525).

Zügen geschaffen, verstand sie sowohl auf dem Gebiete der Geometrie wie auf dem der Zahlen mit Meisterschaft zu handhaben.

II.

Über die Bedeutung der Wörter Analysis und Synthese bei den Griechen und ihre geometrische Algebra.

In der griechischen Mathematik haben die Wörter *Analyse* und *Synthese* zwei vollständig verschiedene Bedeutungen: Die eine, die heute ganz und gar verschwunden ist, bezieht sich auf arithmetische Operationen; die andre auf Beweis- und Erfindungsarten.

Als Operation ist *Synthese* einfach der technische Ausdruck für *Addition*. Die Analyse besteht darin, daß man von einer Einheit auf eine niedrigere kommt; die Reduktion von Zählern auf ein und denselben Nennwert ist für jeden einzelnen von ihnen eine Analyse; oder, um ein andres Beispiel zu wählen, hat man eine Summe (Synthese) von Talenten, Minen, Drachmen, Obolen, und will man sie in Obolen ausdrücken, so ist die vorzunehmende Operation das, was man Analyse nennt.

Dieses Beispiel gibt uns den Schlüssel zur Erklärung der primitiven etymologischen Bedeutung des Wortes *Analyse* in der Anwendung auf diese Operation. Ursprünglich ist die Analyse rein materiell; um eine Sammlung von Münzen zu zählen (was sicher eines der primordialen Probleme war), gruppiert man die niedern Münzeinheiten nach Päckchen, Rollen, Säcken, so, daß jede Gruppe eine höhere Einheit bildet. Diese Gruppierung, die notwendigerweise nach einer steigenden Rangordnung der Einheiten stattfindet, ist die Synthese; handelt es sich hingegen darum, diese Gruppierung aufzulösen, so verfährt man nach der umgekehrten Rangordnung; das ist dann die Analyse (d. h. Auflösung nach rückwärts), die infolgedessen als Operation genau das Gegenteil der Synthese ist, *aber immer eine vorhergehende Synthese voraussetzt.*

Als Beweis- oder Erfindungsmodus tritt die Analyse bei den Alten in zwei wesentlich verschiedenen Formen auf, die Vieta sorgfältig auseinander gehalten hatte (indem er für sich die Schöpfung einer dritten Form beanspruchte, welche unsere heutige Gleichungstheorie zum Gegenstand hatte). Nach ihm wurde diese Unterscheidung jedoch fallen gelassen; und die Folge davon ist ein gewisses Durcheinander in der Terminologie, dem vorgebeugt werden soll.

Von den beiden alten Formen der Analyse ist die eine, die Vieta poristisch nennt, früher aufgetreten als die andre, wenigstens dem Namen nach. Nur auf sie lassen sich in Wirklichkeit die Definitionen der Analyse bei den Griechen anwenden; Beispiele dafür findet man bei Euklides (XIII, 1—5); doch scheinen die Beispiele spätere Zusätze zu sein.

Diese Analyse hat zum Zweck die Erfindung, nicht einer Lösung, sondern einer Beweisführung für eine Lösung (oder einen formulierten Satz). Man nimmt diese Lösung oder diesen Satz als richtig an und ändert dann, unter Berücksichtigung der gegebenen Bedingungen, die Beziehung, die sie ausdrückt, so lange, bis man entweder zu einer Identität, oder zu einem schon bekannten Satze gelangt. Um den Beweis zu haben, braucht man nur die Analyse umzukehren; diese Umkehrung nannten die Alten Synthese. In dieser Bedeutung eines logischen Prozesses setzt also die Synthese immer eine vorhergehende Analyse voraus, während bei der operatorischen Synthese und Analyse das Gegenteil der Fall war. Selbstverständlich ist die poristische Analyse keine Methode in dem Sinne, daß sie zu einem ihr eigentümlichen System ausgebaut werden könnte: Der Mathematiker muß sie zu handhaben wissen, um die Genauigkeit von Formeln oder von Beziehungen, die ihm als richtig ohne Beweis gegeben werden, zu prüfen; aber sie ist weiter nichts für ihn als ein ganz spezieller Fall der modernen analytischen Methode. Es ist jedoch wahrscheinlich, daß diese poristische Analyse eine relativ wichtige Rolle bei der Konstituierung der *Elemente* gespielt hat, als die ersten griechischen Geometer strenge Beweise für die praktischen Formeln und die durch Intuition gelieferten Sätze zu suchen hatten; man kann annehmen, daß sie gerade auf diesem Wege dazu kamen, die Axiome zu bestimmen, die sie aufgestellt haben. Andrerseits könnte man mit dieser poristischen Analyse die Untersuchungen über die gegenseitige Abhängigkeit der angenommenen oder an ihrer Stelle anzunehmenden Axiome in Verbindung bringen. In Wirklichkeit aber haben die bei diesen Forschungen angewandten Verfahren wesentlich modernen Charakter.

Der Ursprung der Theorie dieser Analyse und der entgegengesetzten Synthese ist zweifellos in einer wohlbekannten Stelle aus Platos *Republik* (VI, gegen das Ende) über den doppelten dialektischen Weg zu suchen. Plato beschreibt dort mit großer Genauigkeit den Erfindungs- und den Expositionsmodus einer zu machenden Beweisführung, ohne ihnen technische Namen zu geben. Seit Aristoteles dringt der Ausdruck Analyse in die Logik ein, um die Reduktion einer Beweisführung auf eine kanonische Form zu bezeichnen. Dem Worte Synthese aber erging es nicht so gut; die griechischen Geometer scheinen es allein gebraucht, oder vielmehr etwas mißbraucht zu haben, weil die beiden Wörter Synthese und Analyse ihnen schon aus der Arithmetik her als Gegensätze geläufig waren.

Aber in dieser Bedeutung eines logischen Prozesses hat das Wort Analyse gar nicht denselben etymologischen Sinn wie in der Bedeutung einer arithmetischen Operation. Hier ist die ursprüngliche Metapher diejenige des zu lösenden Knotens, mit dem man die verwickelte Frage, die Aporie, das Rätsel, vergleicht. Der natürliche Weg dazu ist, zuerst die Lösung zu geben und dann, indem man von dieser Lösung als richtig ausgeht, zu zeigen, daß sie die gegebenen Bedingungen erfüllt (Auflösung, Analyse). Und das ist auch wirklich der Weg, der in den euklidischen Beispielen eingeschlagen wird.

Die zweite Form der Analyse bei den Alten ist von Vieta als die *zetetische* bezeichnet worden. Sie hat das Auffinden der Lösungen (oder äquivalenten Sätze) zum Zweck. In Wirklichkeit ist sie nichts anders als das Grundverfahren der modernen analytischen Methode. Sie besteht darin, daß man das Problem als gelöst annimmt, die Beziehungen der Bedingungen aufstellt, ohne zwischen bekannten und unbekannten Größen zu unterscheiden, und schließlich durch Elimination zu einer Endbeziehung gelangt, die nur mehr ein Minimum von Unbekannten enthält, und zwar eine für die bestimmten Probleme und mehrere bei der unbestimmten Analyse für die Zahlen, oder für die Orte (Gleichung von Kurven oder Oberflächen) in der Geometrie.

Einige sehr bemerkenswerte Beispiele dieser zetetischen Analyse der Alten findet man bei Pappus für die Geometrie; besonders häufig aber wird sie angewandt in den Problemen des Diophantes, dessen Lösungen fast ausschließlich analytisch sind und sozusagen normalerweise mit der Schlußbemerkung endigen: „Was die Synthese anbetrifft, so ist sie evident.“

Zwei Bemerkungen möchte ich hier noch machen: erstens, die zetetische Analyse erhielt diesen Namen wegen der Analogie mit der poristischen Analyse; angewandt aber wurde sie sicher lange, bevor sie Analyse genannt wurde. Denn ihr Grundprinzip, das Problem als gelöst anzunehmen, ohne irgendwelche andre Hypothese über die Lösung aufzustellen, ist in Wirklichkeit das einzige methodische Mittel, zu einer Lösung zu kommen; die Anwendungen derselben sind also ebenso alt wie die Probleme, und wir wissen andrerseits, daß die ersten griechischen Geometer diese Anwendungen ganz anders als Analyse nannten. Sie sagten nämlich ἀπαγωγή (deductio), weil das, was ihnen wesentlich dabei erschien, der Umstand war, daß das ursprüngliche Problem nach und nach, durch das analytische Verfahren, auf andre sukzessive Probleme zurückgeführt wird. Übrigens ist es gar nicht wahr, daß diese Probleme in sich selbst einfacher und leichter zu lösen sein müssen als das erste.

Zweitens ist die Synthese einer zetetischen Analyse, im Sinne der Griechen, nichts andres als die Verifikation der Richtigkeit der Lösung, also in der Wirklichkeit eine poristische Analyse, die man ihrerseits umkehren müßte, um eine eigentliche synthetische Beweisführung zu haben. Zwischen der analytischen Methode (wie sie die Modernen handhaben) und der sog. synthetischen Methode besteht also kein direkter Gegensatz.

Wesentlich zu bemerken ist aber auch, daß die Synthese für die Alten untrennbar von der Analyse war und sie voraussetzte, daß sie infolgedessen ihre theoretische Expositionsmethode nie als synthetisch bezeichnet haben. Ein Beispiel möge die Bedeutung dieser technischen Ausdrücke bei den Alten etwas genauer kennzeichnen: Es ist sicher, daß sie schon vor Euklid auf analytischem Wege zu der Erkenntnis kommen konnten, daß der Ort der vier Geraden ein Kegelschnitt ist*) (der Ort der vier Geraden ist der Ort der Punkte einer Ebene, die so liegen, daß das Produkt ihrer Entfernungen von zwei gegebenen Geraden in dieser Ebene in einem gegebenen Verhältnis zum Produkt ihrer Entfernungen von zwei andern in derselben Ebene gegebenen Geraden steht). Die vollständige Synthese desselben Ortes bot ihnen hingegen große Schwierigkeiten; nun hatte aber diese Synthese als einziges Objekt die Konstruktion des Kegelschnittes, wenn die vier Geraden gegeben

*) Siehe die Anmerkung zu Nr. 307.

waren; diese Konstruktion ist jedoch nur von der vollständigen Diskussion der analytischen Lösung abhängig und fällt also für uns unter die analytische Methode.

Aus dem oben angeführten Beispiel geht zur Genüge hervor, daß die Alten das Feld der geometrischen Analyse, den τόπος ἀναλυόμενος, wie Pappus sagt, bedeutend erweitert hatten. Obschon ihre Expositionsverfahren immer wesentliche Unterschiede mit den unsrigen gezeigt haben, stand doch ihre zetetische Methode im Grunde genommen der unsrigen näher, als man im ersten Augenblick glauben möchte. Der Grund davon ist, daß sie, während ihr algebraischer Symbolismus sich nur mit Mühe entwickelte, seit dem 4. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung einen geometrischen Symbolismus aufgestellt hatten, der zu einer zweifachen Darstellungsweise führte, einer in Figuren und einer mündlichen oder schriftlichen; in dieser wurden die Operationen durch Ausdrücke von möglichst großer Knappheit (konventioneller Gebrauch von Präpositionen, usw.), und die Größen als Linien der Figur bezeichnet. Diese Ausdrucksweise bot zugleich alle Vorteile des Gebrauchs der Buchstaben in der Analyse des Vieta, wenigstens für die Potenzen 2 und 3. So hatten sie, wahrscheinlich schon seit der Zeit der ersten Pythagoräer, eine richtige geometrische Algebra für die ersten Grade aufstellen können, mit dem klaren Bewußtsein, daß sie genau numerischen Operationen entspräche.

Obschon sie sich andrerseits nicht bis zur allgemeinen Idee der Koordinaten erhoben haben, ist ihre Art, die Kegelschnitte zu betrachten, doch derjenigen unserer analytischen Geometrie ganz ähnlich; denn zuerst definieren sie dieselben als Schnitt eines Kegels durch eine Ebene, dann bringen sie die Punkte derselben in Beziehung mit einem Durchmesser (oder einer Achse) und stellen die Beziehung zwischen einer *Abszisse* (von dem Scheitel aus) und einer *Ordinate* auf. Diese Wörter selbst kommen durch Vermittlung lateinischer Übersetzungen von ihren technischen Ausdrücken her. Die von ihnen aufgestellte Gleichung reduziert sich auf die moderne allgemeine Form:*) $y^2 = px \pm \frac{p}{a} x^2$. Fehlt das Glied in x^2 (wenn a unendlich ist), so erhält man x als Funktion von y^2 durch eine einfache Division (παραβολή in der Geometrie); ist a endlich und positiv, so erhält man x durch eine Parabel mit Überschuß (ὑπερβολή); ist a endlich und negativ, so erhält man x durch eine Parabel mit Fehlbetrag (ἔλλειψις). Daher stammen denn auch die drei klassischen Namen Parabel, Hyperbel und Ellipse, die seit Apollonius den Kegelschnitten gegeben werden.**)

Die Verfahren bei der Transformation der Koordinaten im Altertum sind unvollkommen infolge des Mangels an allgemeiner Auffassung des Problems; eine besondere Folge davon sind die Schwierigkeiten, auf die sie bei

*) Anmerkung zu Nr. 307.

**) Vgl. hiermit Tropfke: Geschichte der Elementarmathematik (Leipzig, Veit & Co.) II S. 437—440.

der Synthese des Ortes der vier Geraden stießen. Nichtsdestoweniger existieren diese Verfahren.

Die Anfangsidee, die seit dem 4. Jahrhundert zum Studium der Örter führte, war übrigens, die Lösung bestimmter Probleme durch ein graphisches Verfahren vermittelst des Schnittpunktes zweier Örter zu finden.*) Und der Zweck, den sie außer dem Studium gewisser Eigenschaften der Kurven methodisch verfolgten, war, die Probleme zu erkennen und zu klassieren, je nachdem sie durch die Intersektion von Geraden und Kreisen (ebene Probleme, ebene Örter) gelöst werden konnten, oder die Intervention von Kegelschnitten (körperliche Probleme, sog. körperliche Örter, insofern sie sich aus der Intersektion eines festen Körpers durch eine Ebene ableiten lassen), oder noch weniger einfachen Kurven (grammische Probleme) erforderten.

Wie endlich der moderne Mathematiker sich oft bei einem geometrischen Problem damit begnügt, die analytische Berechnung bis zur Bestimmung der Schlußgleichung zu führen, ohne zur Lösung überzugehen, so beschränkt sich der Geometer des Altertums im Prinzip darauf, das Problem auf einen Fall zurückzuführen, welcher einer bestimmten Form dieser Schlußgleichung entspricht. Die namentliche Aufzählung dieser durch das Fehlen des Begriffes von positiven und negativen Größen natürlich komplizierteren Fälle bildet im besonderen und für die ebenen Probleme das Objekt der *Data* des Euklid.

III.

Positive und negative Größen.

Die Einführung der Konvention, die Koordinaten positiv oder negativ zu zählen, je nach der Richtung, in der man sie vom Ausgangspunkt annimmt, wird oft mit Unrecht dem Descartes zugeschrieben. In Wirklichkeit enthält die *Geometrie* von 1637 bei diesem Punkt nur einige Bemerkungen über die Interpretation der wahren oder falschen (positiven oder negativen) Wurzeln der Gleichungen, und diese Bemerkungen gehen kaum über das hinaus, was Vieta darüber sagt.

Was die historische Seite der Frage anbetrifft, so müssen wir vorerst darauf hinweisen, daß eine negative Wurzel für die Griechen keinen Sinn hatte. Ja, man hat sogar behauptet, daß ihnen die Existenz zweier positiver Wurzeln in einer Gleichung vom zweiten Grad nicht bekannt gewesen sei. In Wirklichkeit stellten sie sich die Frage anders als wir. Das allgemeinste Problem für sie, das *ebene* Problem, bestand darin, zwei Größen zu finden, wenn man ihr Produkt und ihre Summe, oder ihre Produkt und ihre Differenz kannte.**) Stellten sie in einem besondern Falle dieses Problem in Gestalt einer algebraischen Gleichung, so war die Unbekannte für sie entweder die kleinste oder die größte der beiden Größen; sie faßten sie also als einwertig auf: aber sie wußten wohl, daß beide Größen die Gleichung befriedigten.

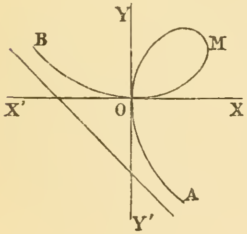
*) Nr. 254, 255, 257.
**) Nr. 199, 200, 210, 211.

Die klassische Schule der Araber verwarf auch die negativen Wurzeln, während die Hindus sie schon annahmen. Es ist noch nicht recht festgestellt, ob die Annahme dieser falschen Wurzeln *(fictae, falsae)* im lateinischen Westen aus dem Orient importiert ist, ob sie durch die leichte Interpretation negativer Lösungen in verschiedenen Fällen konkreter Probleme vom ersten Grade ihren Anfang genommen hat, oder ob bei den Gleichungen vom zweiten Grade, die von nun an abstrakt in kanonischen Formen, und nicht mehr, wie bei den Griechen, mit einer konkreten Beschränkung betrachtet wurden, die aus Bequemlichkeitsrücksichten entstandene Idee, einen Parallelismus für die Zahl der Lösungen in den verschiedenen Fällen aufzustellen, eine hervorragende Rolle gespielt hat. Wie dem auch sei, die neue Auffassung verbreitet sich vom 15. Jahrhundert an; sie ist definitiv durchgedrungen im 16. Jahrhundert, als die Entdeckung der Lösung der Gleichung vom dritten Grade und des casus irreducibilis dazu führte, Wurzeln von negativen Größen zu berechnen.

Obschon Vieta sich dieser Auffassung gegenüber sehr zurückhaltend zeigt, entwickelt sie sich mit großer Klarheit in seiner Schule, welche nun die Ausdrücke: positive und negative Wurzeln im modernen Sinne aufnimmt. Das erste bekannte Beispiel davon findet sich übrigens in einem Pamphlet vor, das Jean de Beaugrand im Jahre 1638 gegen Descartes geschrieben hat. Er wirft darin dem Verfasser der *Geometrie* besonders vor, behauptet zu haben, wenn man in einer Gleichung x durch $x - a$ ersetze, vermehre man die wahren Wurzeln um a, während man die falschen um dasselbe Quantum vermindere. Nach ihm muß man sagen, wie wir heute, daß alle Wurzeln um a vermehrt werden, im Gegensatz zu Descartes, der noch immer, wenn er von der Größe einer falschen Wurzel spricht, darunter ihren absoluten Wert versteht.

An diesem Beispiel sehen wir, wie sich die jetzige Auffassung der negativen Größen nach und nach gebildet und modifiziert hat, bis zu dem Punkte, wo die Formulierung der Sätze allgemein und unabhängig von dem Vorzeichen sowie von der Größe der Quantitäten geworden ist.*) Wie der Algebra, so erging es auch der Geometrie, wie aus folgendem speziellen Beispiel hervorgeht.

Im Jahre 1638 schlug Descartes, um die von Fermat erdachte Methode der Tangenten zu prüfen, diesem vor, die Tangente der folgendermaßen definierten Kurve zu finden: Ort der Punkte, die so beschaffen sind, daß die Summe der Kuben ihrer Entfernungen von zwei rechtwinkligen Geraden (OX, OY) dem Produkt dieser Entfernungen mit einer gegebenen Strecke (a) gleich ist.

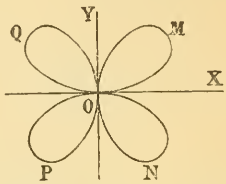


Nimmt man an, der Punkt M sei im Winkel XOY gelegen, so erhält man sofort die Gleichung $x^3 + y^3 = axy$, welche in der Gesamtebene eine

*) Nr. 212.

Kurve wie $AOMOB$ mit zwei unendlichen Zweigen darstellt; das ist die Kurve, die man das „Folium Cartesii" nennt. Es ist jedoch leicht, zu sehen, daß die Punkte dieser Kurve in den Winkeln YOX', $Y'OX$ in Wirklichkeit der geometrischen Formulierung nicht entsprechen, und daß die Differenz der Kuben der Entfernungen in diesen Winkeln, nicht aber ihre Summe in einem gegebenen Verhältnis zu dem Produkt dieser Entfernungen steht.

Will man sich an die geometrische Formulierung halten, muß man in einem jeden der vier durch die Achsen gebildeten Winkel ein mit dem Blatt OM kongruentes Blatt zeichnen (und diese Figur könnte nur durch eine Gleichung vom zwölften Grade dargestellt werden, welche gleichzeitig acht unendlichen, in Wirklichkeit nicht zum geometrischen Ort gehörenden Zweigen entsprechen würde).



Nun hat aber Roberval die kartesische Kurve gerade in dieser vierblätterigen Gestalt gezeichnet und ihr infolgedessen den Namen *galand* (Bänderknoten) gegeben, ohne daß Descartes, der Roberval so heftig bekämpfte, ihm je dafür den geringsten Einwand gemacht hätte.

Untersucht man übrigens sorgfältig die von Descartes in seiner *Geometrie* aufgestellten Regeln und deren Anwendung, so kann man daraus ersehen, daß man nach seiner Ansicht und derjenigen aller seiner Zeitgenossen eine Gleichung eines geometrischen Ortes im Prinzip nur für den Winkel der Koordinaten, in dem sie aufgestellt worden ist, gültig ist. Daß eine Gleichung auf die andern Winkel ausgedehnt wurde, geschah auf ganz natürliche Weise in besondern Fällen, um die negativen Wurzeln der Gleichungen zu interpretieren; da sie aber besondere Konventionen nötig machte (zum Beispiel, um die Entfernungen als positiv oder negativ zu zählen), dauerte es in Wirklichkeit ziemlich lange, ehe sie sich vollständig einbürgerte, und man kann keinem Geometer im besondern das Verdienst zuerkennen, sie eingeführt zu haben.

Diese historische Bemerkung kann übrigens den Ruhm des Descartes in keiner Weise beeinträchtigen. In der Interpretion negativer Lösungen für arithmetische Probleme (besonders über die Gesellschaftsrechnungen, Brief an Schooten vom 9. April 1649) hat er eine so außergewöhnliche Kühnheit an den Tag gelegt, daß man annehmen kann, wenn er in der Geometrie nicht weiter gekommen ist, so rühre das daher, weil er kein Bedürfnis dafür gehabt habe; er wünschte, wie er stolz sagte, daß die Nachwelt ihm dankbar sei für die Fragen, die er ihr zu behandeln ließ, nachdem er ihr seine Methode gegeben.

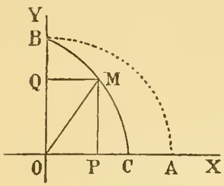
IV.

Über die von den Alten studierten Kurven.

Außer dem Kreis und den Kegelschnitten hatten die Griechen eine ziemlich große Anzahl Kurven studiert. Von den einen kennen wir nur mehr den Namen, und die Bemerkungen, die darüber gemacht worden sind, bleiben notwendigerweise mehr oder weniger mutmaßlich. Die andern, über die wir Bestimmtes wissen, sind folgende:

A. Die *Quadratrix des Hippias* oder des *Dinostratus*, der Ort eines Punktes M, der sich in Q auf die Achse OY projiziert und für den die Beziehung besteht:

$$\frac{QB}{OB} = \frac{\text{Winkel } MOB}{\text{Winkel } AOB}.$$

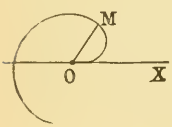


A

(A, B sind zwei feste Punkte, der eine auf der x-Achse, der andre auf der y-Achse, in gleicher Entfernung r vom Nullpunkt.) Die Gleichung der Kurve ist

$$x = \frac{y}{\tan \frac{\pi y}{2r}}.$$

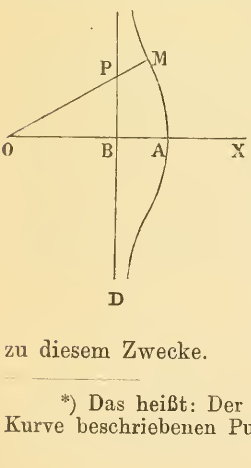
Es ist eine transzendente Kurve, wahrscheinlich vom Sophisten Hippias zur Lösung des Problems der Teilung des Winkels in einem gegebenen Verhältnis erfunden. Dinostratus soll um die Zeit, wo Plato lebte, gezeigt haben, daß das Problem der Quadratur des Kreises darauf hinausläuft, den Schnittpunkt dieser Kurve mit der Achse OX zu finden $\left(\text{für } y = 0,\ x = \frac{2r}{\pi}\right)$. Die asymptotischen, außerhalb des Kreises gelegenen Zweige werden wohl von Apollonius erkannt worden sein.



B

B. *Die Spirale des Archimedes* (bei welcher der Radiusvektor*) OM mit dem Winkel XOM proportional ist), auch eine transzendente Kurve, die in demselben Ideengang wie die vorige als Quadratrix dienen kann.

C. Die zylindrische *Schraubenlinie*, eine transzendente Raumkurve, die Archimedes auch schon kannte, die aber erst Apollonius in einer verloren gegangenen Schrift studiert hat. — Für *Spirale* und *Schraube* hatten die Griechen übrigens nur ein Wort (ἕλιξ).

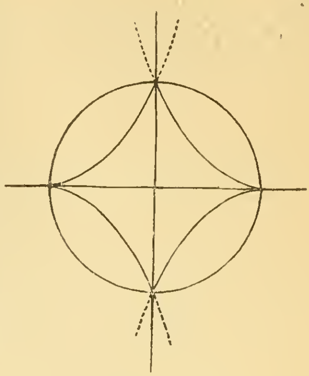


D

D. *Konchoïde des Nikomedes.* Es ist dies der Ort eines Punktes M, der so beschaffen ist, daß die Länge PM konstant ist. Der Punkt O ist fest, ebenso die Gerade PB, die auf OX senkrecht ist; die Gerade OPM dreht sich um den Punkt O; eine Kurve vierten Grades, die in Anbetracht der Leichtigkeit der Zeichnung als Ersatz für die Kegelschnitte bei der graphischen Lösung der körperlichen Probleme vorgeschlagen wurde. Newton empfahl sie sogar noch zu diesem Zwecke.

*) Das heißt: Der Vektor, der im Nullpunkt beginnt und in dem von der Kurve beschriebenen Punkte M aufhört.

E. *Zissoïde des Diokles.**) Diese Kurve ist unter dem Namen des Diokles in dem Kommentar des Eutokius über Archimedes definiert; sie wird dieser Definition gemäß zur Lösung eines körperlichen Problems gebraucht. Der außerhalb des Kreises gelegene Zweig ist bei Eutokius nicht vermerkt. Der Name Zissoïde ist derselben Kurve gegeben worden, weil er im Kommentar des Proklus über Euklid eine Kurve bezeichnet, die innerhalb des Kreises liegt und Rückkehrpunkte auf dem Kreise hat. Man kann streng genommen annehmen, die Alten hätten die Definition so aufgefaßt, um die innerhalb des Kreises gelegenen Kurvenzweige zweier symmetrischer Zissoïden zu betrachten und die außerhalb gelegenen unberücksichtigt zu lassen.

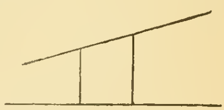


E

V.

Über den Ursprung des Gebrauches der Koordinaten zur graphischen Darstellung der Variation von Erscheinungen.

Beispiele praktischer Anwendungen dieser Art kennen wir erst seit relativ kurzer Zeit; immerhin ist es sehr auffallend, daß dieser Gebrauch vom 14. bis ins 16. Jahrhundert hinein theoretisch auf den Universitäten doziert wurde. Besonders stand eine Abhandlung von Nicole Oresme, *De latitudinibus formarum* für den Unterricht in diesem Kapitel in hohem Ansehen. Die *Form* ist bei ihm die Wesensart eines Körpers, die als mit der Zeit veränderlich angenommen wird (z. B. die Wärme).**) Die *longitudines* (Abszissen) stellen die Längen der Zeitdauer dar: Die *latitudines* (Ordinaten) sollen die entsprechenden Maße der *Form* geben. Die Beständigkeit dieser Form oder ihre mehr oder weniger schnelle regelmäßige Zu- und Abnahme werden so durch gerade Linien mit sehr korrekten Erklärungen dargestellt.***) Die eigentlichen Kurven hingegen treten nur der Unterstützung des Gedächtnisses halber auf; aber zu einer Zeit, wo die Messungen der *Formen* in Wirklichkeit nicht ausführbar waren, hatte es keinen Zweck, die Theorie weiter zu entwickeln.



Eine wichtige Erweiterung dieser theoretischen Anwendung bringen die Schriften des Galilei. Ist die *Form* die Geschwindigkeit eines beweglichen Körpers, so stellt der Flächeninhalt zwischen zwei Ordinaten, der Achse und der Geraden, oder der Kurve der *latitudines*, die von dem Körper während

*) Nr. 264.
**) Nr. 231, 232.
***) Nr. 243.

der entsprechenden Zeitdauer durchlaufene Strecke dar.*) Ist im besondern die Bewegung gleichmäßig beschleunigt oder verzögert, so sind die Geschwindigkeiten auf eine Gerade beschränkt, und die durchlaufene Strecke wird durch ein Dreieck oder ein Trapez gemessen.

VI.

Über den Ursprung der Differential- und Integralrechnung.

Die ersten Probleme der Differential- und Integralrechnung, die gestellt und gelöst wurden, sind Probleme über Quadratur und Kubatur. Dem Zeugnis des Archimedes gemäß ist der Schöpfer der von den Alten angewandten Methode Eudoxus, ein Zeitgenosse des Plato. Diese Methode beruht auf dem Postulat, daß, wenn eine geometrische Größe gegeben ist, man immer ein solches Vielfaches davon finden kann, daß es eine andere gegebene, beliebig große Größe übersteigt (oder umgekehrt ein solches, daß es kleiner ist als jede gegebene, beliebig kleine Größe). Dieses Postulat des Eudoxus (das oft dem Archimedes zugeschrieben wird) ist übrigens von ihm zu dem Zwecke geschaffen worden, um die allgemeine Theorie der Verhältnisse aufzustellen (V. Buch der Euklidischen *Elemente*), das heißt, um in Wirklichkeit die inkommensurablen Größen zu definieren.

Dem Eudoxus verdanken wir also die strengen Beweise, die wir bei Euklid für die elementaren geometrischen Sätze, welche die Betrachtung der Grenzwerte fordern, finden: — Proportionalität des Kreises mit dem Quadrat des Radius (ein Satz, der schon dem Hippokrates von Chios im 5. Jahrhundert v. Chr. bekannt war), — Berechnung der Pyramide, des Kegels, — Proportionalität der Kugel (und der ähnlichen Kugelausschnitte) mit dem Kubus ihres Radius.

Archimedes hat uns Beweise für die Quadratur der Parabel und der archimedischen Spirale hinterlassen; er war der erste, der zeigte, wie die Länge eines krummlinigen Bogens und der Inhalt einer krummen Fläche — bekanntlich lassen sich diese Probleme auf Quadraturen zurückführen — zu betrachten seien. Auch verdanken wir ihm die Prinzipien zum Aufsuchen der Schwerpunkte. Er gab uns die Kubatur der Sphäroïde und Konoïde (Umdrehungsellipsoïde, -paraboloïde und -hyperboloïde) und die Berechnung der krummen Flächen des Zylinders, des Kegels und der Kugel.

Die Beweisführungen der Alten geschahen per reductionem ad absurdum, so daß sie sich der ausdrücklichen Einführung des Begriffes Grenze entschlagen können. Die Auffindungsmethode hat eine zweifache Form:

---

*) Denn stellt man sich auf die in Kapitel VII und VIII angenommenen Standpunkte, so sieht man, daß der Flächeninhalt als Funktion der Abszisse, die einer der Ordinaten entspricht, betrachtet, als Ableitung diese Ordinate hat, d. h. die Geschwindigkeit gerade wie die vom Körper durchlaufene Strecke. (Nr. 297). Nimmt man an, dieser Flächeninhalt und diese Strecke werden gleichzeitig Null, so haben sie notwendigerweise als Maß dieselbe Funktion der Zeit (Nr. 287).

Die erste, genannt Exhaustionsmethode, besteht darin, daß man von der gesuchten Größe eine Reihe endlicher Glieder abzieht, so daß die immer verminderte Differenz kleiner als jede beliebig gegebene kleine Größe wird (wie wenn man z. B. zuerst mehr als die Hälfte, dann mehr als die Hälfte des Restes usw. abzieht).*) Diese Methode ist in der Tat die einzige, die wir wirklich bei Euklid finden; sie entspricht der Berechnung in der Form von Reihen**) und läßt sich natürlicher auf die Quadraturen anwenden, die nicht auf algebraischem Wege lösbar sind, wie z. B. die des Kreises. Ist die Reihe eine geometrische, so gibt die Exhaustionsmethode dieselben Resultate wie die folgende.

Die zweite Methode, die wir dem Archimedes verdanken, besteht darin, daß man Werte einer Funktion, welche einer arithmetischen Reihenfolge von Werten der Veränderlichen entsprechen, addiert; multipliziert man mit der konstanten Differenz der sukzessiven Werte der Veränderlichen, und nimmt man an, diese Differenz nehme unendlich ab, so erhält man auf diese Weise direkt die Quadratur, indem man zur Grenze übergeht.***) Diese zweite Methode entspricht der Leibnizschen Auffassung der ursprünglichen Funktion von $F(x)$ als $\int F(x)\,dx$.

Das waren also die Kenntnisse, die das Altertum dem Ende des 16. Jahrhunderts vermachte. Sie reduzierten sich in Wirklichkeit auf die Integration von $x\,dx$ und $x^2\,dx$; aber diese Integration hatte man durch Verfahren erlangt, die sich verhältnismäßig leicht auf die sukzessiven Potenzen von x ausdehnen ließen. Zuerst wurden Untersuchungen über die Schwerpunkte angestellt (Commandinus, der Übersetzer des Archimedes; Galilei; Luca Valerio). Da die Summe der Kuben†) von Zahlen einer arithmetischen Reihe nach dem Zeugnis der Alten bekannt war, gelangte man fast unmittelbar zu der Integration von $\int x^3\,dx$. Dasselbe Problem wurde im 17. Jahrhundert weiter untersucht von Cavalieri, Roberval und Fermat, die sich unabhängig voneinander damit beschäftigten.

Das von Cavalieri zu diesem Zwecke eingeschlagene Verfahren ist bekannt unter dem Namen: Methode der Indivisibilien; Galilei scheint der Schöpfer derselben zu sein; in der Tat ist das *Unteilbare* des Cavalieri nichts anderes als unser *unendlich Kleines* mit einer vor der Kritik kaum standhaltenden Terminologie und Beweisführungen von nicht allzu großer Strenge.

Roberval hat nur Resultate veröffentlicht; seine Methode war ungefähr identisch mit der Cavalieris. Fermats Arbeiten wurden erst 1679 gedruckt, waren aber schon lange voraus als Manuskript verbreitet worden; er ging in seinen Untersuchungen sehr weit und bewies direkt den Wert des Integrals

*) Nr. 295, 296, 297, 298, 299, 308, 309, 310, 311.

**) Nr. 187.

***) Nr. 329, 330.

†) Man braucht nur auf dieselbe Weise zu verifizieren wie in der Anmerkung zu Nr. 296, um zu beweisen, daß die Summe der Kuben der n ersten natürlichen Zahlen gleich ist dem Quadrat der Summe dieser Zahlen.

$\int x^n dx$ für alle positiven und negativen Werte von n [außer für $\int \frac{dx}{x}$, das er vom geometrischen Standpunkt aus als unreduzierbar ansah, ebenso wie die Quadratur des Kreises; Gregorius a S. Vincentio war es, der diesen Wert auf die logarithmische Funktion zurückführte*)]. Fermat erfand die partielle Integration und die Integration durch Substitution, und endete sie auf die Wurzeln vom zweiten Grade und ihre Potenzen an.

Im Jahre 1659 veröffentlichte Pascal unter dem Pseudonym Dettonville als Lösung der berühmten Probleme, die er über die Zykloïde aufgestellt hatte, verschiedene Beweise, besonders über die Integration der Potenzen von $\sin x$ und $\cos x$. Er hatte auch erkannt, daß gewisse Probleme sich auf die Rektifikation der Ellipse zurückführen lassen.

Man kann also sagen, daß schon vor der Erfindung der Differential- und Integralrechnung durch Newton und Leibniz die Gesamtheit der Hauptprobleme der Integralrechnung für die damals gebräuchlichen Funktionen gelöst war.

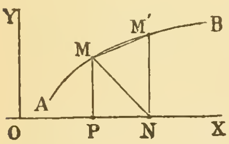
Mit der Differentialrechnung war es ungefähr ebenso; auf diesem Gebiete gab das berühmte Tangentenproblem den Anstoß. Die Alten hatten keine allgemeine Methode aufgestellt: man definierte die Tangenten eines Kreises, eines Kegelschnittes, der Spirale des Archimedes einfachhin als Geraden, deren Punkte alle (mit Ausnahme des Berührungspunktes) außerhalb der Kurve lägen (wenigstens in der Nachbarschaft des Berührungspunktes), und die damit zusammenhängenden Beweise beruhten auf besondern Kunstgriffen.

Descartes war der erste, der in seiner *Geometrie* von 1637 eine Methode publizierte, die wenigstens auf alle algebraischen Kurven anwendbar war. Diese Methode ist folgende:

Im Punkte M (x_1, y_1) der Kurve AB:

(1) $$F(x, y) = 0$$

soll eine Tangente konstruiert werden.



Anstatt die Tangente direkt zu suchen, bestimmt Descartes die Normale, indem er einen Kreis konstruiert, der die Kurve in zwei benachbarten Punkten M und M' schneidet und dessen Mittelpunkt N auf der x-Achse liegt. ($ON = v$, $MN = s$.) Da $\overline{MN}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PN}^2$ oder

(2) $$s^2 = y^2 + (v - x)^2,$$

so eliminiert er zwischen (1) und (2) entweder y oder x und gelangt auf diese Weise z. B. zu einer Gleichung

(3) $$f(x, s, v) = 0.$$

*) Nr. 301.

Durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten kann er nun s und v so bestimmen, daß die Gleichung (3) zwei Wurzeln hat, die gleich x sind, das heißt, daß, da die beiden Schnittpunkte M und M' zusammenfallen, der Kreis die Kurve berührt und MN infolgedessen die Normale im Punkte M darstellt.

Dieses scheinbar rein algebraische Verfahren scheint weit entfernt von der Differentialrechnung zu sein. Es ist jedoch nicht schwer einzusehen, daß es einerseits durch Betrachtung*) der Geraden MM' an Stelle des Kreises vereinfacht werden kann, und daß es sich andrerseits zu einer regelmäßigen Methode reduzieren läßt, wenn man aus der Gleichung (1) alle Wurzelzeichen entfernt und sie in kanonischer Form schreibt. Diese Reduktion leistete Hudde in einer Abhandlung, die der lateinischen Ausgabe der *Geometric* des Descartes (1659) beigefügt ist, und nach Regeln, die den unsrigen ganz ähnlich sind, werden daselbst Polynome gebildet, die nichts weiter als Ableitungen von $F(x, y)$ nach x und y sind.

Es ist noch hinzuzufügen, daß schon im ersten Jahre nach dem Erscheinen der *Geometrie* (1638) Florimond Debeaune dem Descartes vorschlug, die Gleichung von Kurven zu bestimmen, bei denen man die Eigenschaft der Tangenten als bekannt voraussetzte. Descartes hatte so zwei wirkliche Differentialgleichungen zu lösen, von denen eine auf eine Hyperbel, die andere auf eine logarithmische Kurve führte. Seine Lösung für diese letzte Kurve ist in einem Brief an Debeaune vom 20. Februar 1639 enthalten, wurde aber erst im dritten Bande seiner *Korrespondenz* im Jahre 1667 veröffentlicht. Er spricht das Wort Logarithmus nicht aus, definiert aber die Funktion auf eine Art und Weise, die er dem Neper entlehnt. Andrerseits teilt er dem Debeaune mit, daß er bei dieser Gelegenheit Untersuchungen angestellt hat, um allgemeine Regeln zu finden, welche die Lösung des Tangentenproblems und des umgekehrten Problems erleichtern sollten. Zu derselben Zeit war er ebenfalls schon im Besitz der Quadraturen für die ganzen Potenzen der Unbekannten. Es ist folglich außer Zweifel, daß er vor Hudde zu abgekürzten Rechenmethoden gelangt war, die mit der Ableitung äquivalent sind, und daß er sich des Inversionsverhältnisses zwischen dem Problem der Tangenten und demjenigen der Quadraturen voll und ganz bewußt war.**)

Als die *Geometrie* im Jahre 1637 veröffentlicht wurde, war Fermat seinerseits dazu gekommen, eine allgemeine Methode der Tangenten aufzustellen. Die Formulierung seiner Regel, die er nun Descartes und zugleich Roberval und andern Pariser Geometern mitteilte, war formell nicht ganz einwandsfrei und gab Veranlassung zu einer Polemik, die ihn dazu brachte, sie zu erklären und zu erweitern. In Wirklichkeit ist sein Ausgangspunkt rein algebraisch, wie derjenige des Descartes, betrifft aber das Aufsuchen des Maximums oder des Minimums einer Funktion einer Veränderlichen, z. B. $y = F(x)$ und stützt sich auf eine Bemerkung des Pappus, nämlich daß für dieses Maximum oder Minimum zwei gleiche Wurzeln vorhanden sind. Be-

*) Nr. 256.
**) Nr. 300.

zeichnet y die Ordinate, so wollen wir mit x und $x+\alpha$ die benachbarten Werte der entsprechenden Abszisse bezeichnen; die Gleichung $F(x+\alpha) - F(x) = 0$ muß für α zwei Wurzeln haben, die gleich Null sind, was auf die Bedingung $F'(x) = 0$ herauskommt und eine Berechnung von x und mithin auch von y ermöglicht. In dieser Form, welche nach der Erklärung Fermats seine Erfindung ist, ist seine ursprüngliche Idee einfach die einer algebraischen Entwickelung und gibt uns gleichzeitig das schnellste Verfahren, um die Bedingung auszudrücken, daß eine Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat. Descartes zog zweifellos für sich selbst Nutzen daraus.

Andrerseits bereiteten die Ausdrucksweise Fermats in der Formulierung seiner Regel *de maximis et minimis* sowie die Natur der Anwendungen, die er von seiner Tangentenmethode machte, den Boden für die Theorie des Unendlich-Kleinen vor. Doch bringt er es noch nicht zur Auffassung der Ableitung als Grenzwert des Verhältnisses $\frac{F(x+\alpha) - F(x)}{\alpha}$, wenn α sich der Null nähert. Wenn er auch wirklich die Ableitungen von x^n für alle Werte von n, positive und negative, ganze und gebrochene zu bestimmen weiß, so behandelt er doch die Wurzelausdrücke im allgemeinen nur vermittelst algebraischer Kunstgriffe (die allerdings leicht in Regeln zu fassen wären). Den Kreisfunktionen*) spricht er, ebenso wie Descartes, den geometrischen Charakter ab; hat er sie zu behandeln, wie in dem Fall der Zykloïde, so setzt er an Stelle des unendlich kleinen Bogens dessen Sehne oder ein Tangentensegment, dessen Verhältnis zu diesem Bogen ebenfalls als Grenzwert die Einheit hat.

Diese übrigens von selbst sich aufdrängende Substitution tritt auch seit dieser Zeit in denjenigen Verfahren für die Konstruktion der Tangenten auf, die nicht zu analytischen Methoden reduziert wurden: zuerst die (auch von Toricelli gefundene) Robervalsche Methode, nach der man eine Kurve durch Zusammensetzung zweier Bewegungen entstehen läßt; die Resultante der beiden Geschwindigkeitskomponenten gibt die Richtung der Tangente. Zweitens hat uns Descartes schon im Jahre 1638 für die Konstruktion der Normalen in einem Punkte der Zykloïde eine Zeichnung gegeben, welche auf der Betrachtung des augenblicklichen Rotationszentrums beruht; er wandte die bipolaren Koordinaten**) auf die Betrachtung der Kegelschnitte und der sog. cartesischen Ovalen an und fand so, ohne sie jedoch zu veröffentlichen, die diesem System eigentümliche Regel der Tangenten. Endlich ist seine Konstruktion der Tangente der Konchoïde des Nikomedes in seiner *Geometrie* vom Jahre 1637 ohne Zweifel durch analoge infinitesimale Betrachtungen gefunden worden.

Eine große Wichtigkeit haben die ersten Geschichtsschreiber der Erfindung der Differential- und Integralrechnung dem Barrowschen Dreieck beigemessen. (Dieses Dreieck wird durch eine unendlich kleine Sehne und durch die unendlich kleinen Differenzen der Abszisse und der Ordinate gebildet.)

---

*) Nr. 261.

**) In diesem System wird ein Punkt durch seine Entfernungen von zwei festen Punkten bestimmt.

Newton mag zwar im Unterricht seines Meisters einige Winke gefunden haben (niemand wagt das zu bestreiten); aber ich glaube nicht, daß sein Genie eines speziellen Hinweises bedurfte. Was Leibniz angeht, so hat er erklärt, am meisten habe er den Schriften Gregorius' a. S. Vincentio und Pascals zu verdanken.

In Wirklichkeit kann man behaupten, daß zu der Zeit, wo Newton und Leibniz anfingen, sich mit Mathematik abzugeben, schon eine Infinitesimalmethode bestand, in dem Sinne, daß die hauptsächlichsten Geometer mit der Handhabung der unendlich kleinen Größen (wenigstens der ersten Ordnung), als Elemente von Summen oder als Elemente von Verhältnissen vertraut waren. Für den ersten Fall (den der Quadraturen) besaßen sie in der den Alten nachgebildeten reductio ad absurdum ein strenges Beweisverfahren, das implicite auf dem Begriff des Grenzwertes beruhte. Für den zweiten Fall (das Problem der Tangenten) war die Theorie noch nicht so recht vertieft worden; aber die Rechenverfahren waren in beiden Fällen ziemlich gründlich entwickelt worden und genügten wirklich für die Lösung der bis dahin gestellten Probleme.

Jeder Geometer hatte übrigens seine persönlichen Schreibweisen und seine Abkürzungen, die er gewöhnlich für sich behielt, indem er nur die Resultate veröffentlichte oder die Beweisführungen nachträglich in Einklang mit der Schreibweise der Resultate brachte. In diesem Falle ist z. B. Huygens, dessen Arbeiten über die Evoluten eines der bemerkenswertesten Beispiele von Anwendungen der Infiinitesimalmethode sind, und der bis zum Ende seines Lebens der Notwendigkeit enthoben war, den Leibnizschen Symbolismus handhaben zu lernen. Desgleichen Newton selbst, der in seinen *Prinzipien* der neuen Analyse ein ganz neues Feld eröffnete, das der Dynamik, aber eben die von ihm angewandten analytischen Verfahren verheimlichte.

Das lange Stillschweigen, das Newton über diese Verfahren beobachtete, gab später Anlaß zu einem Prioritätsstreit zwischen ihm und Leibniz; dieser Streit wurde noch heftiger, als Leibniz ungerechterweise des Plagiats beschuldigt wurde. Nachher hat man sich viele Mühe gegeben, hervorzuheben, worin der Unterschied in der Auffassung der beiden Erfinder der Differential- und Integralrechnung besteht, und zu diesem Zwecke besonders auf die Schreibweisen und die Terminologie hingewiesen. Leibnizens Ideengang ist uns durch seine Papiere hinreichend bekannt, nicht so der Newtons; was man von der ursprünglichen Form seiner Methode weiß, ist in Wirklichkeit nicht genügend, uns ein klares Bild zu geben.

Leibniz hat sich einfach die Aufgabe gestellt, ein operatorisches Zeichensystem zu finden, das man auf die verschiedenen, bis dahin (1670) bekannten Verfahren der Infinitesimalmethode anwenden könnte. Sein System ist durchgedrungen und ist nur in Einzelheiten vervollkommnet worden. Seine Terminologie aber wurde fallen gelassen. Zuerst wurde der Ausdruck *Differential* an Stelle von *Differenz* gesetzt, um das unendlich kleine Element der Funktion zu bezeichnen; der Ausdruck Differenz wurde auf die endlichen Differenzen beschränkt.

Gegen das Ende des 18. Jahrhunderts wurde der Ausdruck Ableitung, der in der Leibnizschen Terminologie fehlte (und durch den Ausdruck Differentialquotient nur ungenügend ersetzt wurde), von Lagrange mit dem der primitiven Funktion angenommen. Den Ausdruck Integral hatte Jakob Bernoulli dem Leibniz vorgeschlagen; auch der Ausdruck Funktion stammt von Leibniz, wurde aber erst in den letzten Jahren des 17. Jahrhunderts von ihm gebraucht.

Newton sieht jede Veränderliche als Funktion einer einzigen unabhängigen Veränderlichen an, die als gleichmäßig zunehmend angenommen wird und deren Typus die Zeit ist.*) Als solche heißt jede Funktion eine *Fluente,* und jede Beziehung zwischen zwei abhängigen Veränderlichen ist eine Beziehung zwischen *Fluenten,* Die Ableitungen sukzessiver Ordnungen**) der Fluenten, nach der unabhängigen Veränderlichen genommen, sind die *Fluxionen* sukzessiver Ordnungen der *Fluenten.* Die Ordnung wird durch die Anzahl der über den Fluenten (an Stelle von Akzenten) stehenden Punkte angegeben. Die Differentiale sukzessiver Ordnungen werden folglich als Produkte der Fluxionen mit der Potenz derselben Ordnung des unendlich kleinen Elementes der unabhängigen Veränderlichen dargestellt; Newton bezeichnet dieses Element durch den Buchstaben o. Die Gesamtheit dieser Auffassung scheint von mechanischen Erwägungen beherrscht zu sein. Die Folge davon war, daß die Terminologie erst vervollständigt werden konnte, als Newton seine Ideen auf diesem Gebiete ganz entwickelt hatte; man hat jedoch die Bemerkung gemacht, daß der Begriff der Geschwindigkeit der Veränderung einer Ordinate (Funktion) für diese Theorie hinreichend war, und daß er schon durch Neper in seinen Definitionen des Logarithmus eingeführt worden war.

Vom Standpunkt theoretischer Strenge aus betrachtet, hat die Erfindung der Differential- und Integralrechnung an sich keinen entscheidenden Fortschritt gebracht, die Formulierung der Postulate, auf denen sie beruhte, ist unbefriedigend geblieben bis ins letzte Jahrhundert hinein; höchstens hat sie uns ein Mittel gegeben, die Regeln über die Handhabung der unendlich kleinen Größen verschiedener Ordnungen etwas genauer zu fassen.

Die Folgen dieser Erfindung aber waren trotzdem von allergrößter Bedeutung Einerseits wurde es durch sie möglich, in der Geometrie Probleme von einer ganz neuen Art zu stellen und zu lösen (besonders und schon ganz früh diejenigen, die man heute zum Gebiete der Variationsrechnung zählt), sowie die Anwendungen der Mathematik auf die Physik zu vermehren.

Zweitens hat diese Erfindung der Differentialrechnung eine gewisse Priorität gegeben: denn diese kann sich ohne Einführung neuer Funktionen weiterentwickeln, während das nicht der Fall ist für die Integralrechnung.***) Die

*) Nr. 275, 276, 277.

**) Es war im Laufe dieses Werkes nie die Rede von sukzessiven Ableitungen; ist $f(x)$ eine Funktion und $f'(x)$ deren (erste) Abgeleitete, so wird die Abgeleitete von $f'(x)$ durch $f''(x)$ dargestellt und heißt zweite Abgeleitete von $f(x)$; die Abgeleitete von $f''(x)$ ist die dritte Abgeleitete von $f(x)\ldots$

***) Nr. 301.

Differentialrechnung ist also zum Gegenstand einer vollständigen Theorie geworden, welche die unendliche Reihenfolge der Ableitungen umfaßt; die Integralrechnung ist als deren Umkehrung erschienen, während, wie wir gesehen haben, bei der Quadratur und dem Tangentenproblem die Verhältnisse umgekehrt liegen.

Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Problemen war sowohl Fermat als auch Roberval und Descartes aufgefallen (er geht direkt aus der *Schreibweise* des Leibniz hervor); aber er schien ihnen nicht wichtig genug zu sein, um speziell hervorgehoben zu werden, weil für jedes der beiden Probleme schon verschiedene genügende Verfahren bestanden, jedenfalls solange man nicht aus dem Gebiet der algebraischen Funktionen herausging. Nun waren sie aber alle über diesen Punkt einig und vermieden, infolge eines von den Alten übernommenen Vorurteils, systematisch den Gebrauch der tabularen Funktionen (logarithmischen und Kreisfunktionen); es blieb ihnen dann natürlich weiter nichts übrig, als zu besondern Kunstgriffen ihre Zuflucht zu nehmen, wenn sie sog. mechanische (transzendente) Kurven, wie die Zykloïde, zu behandeln hatten.

Ein großer Fortschritt war zu verzeichnen, als man diese Funktionen als analytische betrachtete, indem man sie in Reihen entwickelte, welche nach den steigenden Potenzen der Veränderlichen geordnet waren.**) Die Äquivalenz rein algebraischer Funktionen mit Reihen dieser Art $\left(\text{wie für } \frac{1}{1+x}, \frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ führte natürlich dazu, ihren Gebrauch zu gestatten, besonders da sie sich andrerseits leicht differenzieren und integrieren ließen. Die ersten Arbeiten Newtons und Leibnizens bringen uns die große Wichtigkeit dieses Standpunktes klar vor Augen; ihre Vorgänger auf diesem Gebiet sind übrigens fast ausschließlich Engländer (Merkator, Gregory, Wallis). Während die Mathemiker dieses Landes zur Aufstellung der Infinitesimalmethode in Italien und Frankreich fast gar nichts getan hatten, begannen sie, so um die Mitte des 17. Jahrhunderts, einen unentbehrlichen Beitrag dazu zu liefern, ohne den die Erfindung der Infinitesimalmethode erst viel später Früchte getragen hätte.

Wir haben oben darauf hingedeutet, daß der Gebrauch der Reihen in gewisser Hinsicht der Exhaustionsmethode der Alten ähnlich ist; da aber dieses Verfahren in Wirklichkeit auf die Summation unendlicher geometrischer Reihen beschränkt war, so ist es klar, daß die Darstellung transzendenter Funktionen durch Reihen eine ebenso neue wie fruchtbringende Idee war. Diese Darstellung ist notwendigerweise sehr enge mit der Differential- und Integralrechnung verbunden und wurde erst nach deren Erfindung vervollständigt, besonders nachdem Leibniz als der erste bis zur Betrachtung der Exponentialfunktion durchgedrungen war.

*) Beispiele ähnlicher Reihen sind in Nr. 330 gegeben worden.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten sowie die Studierenden der Mathematik und Physik. Gegründet 1841 durch J. A. Grunert. III. Reihe. Im Anhange: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Herausg. von E. Lampe in Berlin, W. Franz Meyer in Königsberg in Pr. und E. Jahnke in Berlin. 1908/9. 14. Band. gr. 8. Preis für den Band von 24 Druckbogen in 4 Heften n. *M.* 16.—

Das Archiv ist das einzige Organ, das sich nicht nur die Erweiterung der mathematischen Erkenntnis, sondern auch die Verbreitung mathematischer Forschung als Ziel steckt. Zur Fesselung des Leserkreises sollen auch solche Aufsätze gebracht werden, die die Kenntnisnahme und das Verständnis der neueren mathematischen Anschauungen und Entdeckungen vermitteln.

Um zu selbständigen Arbeiten anzuregen, werden Aufgaben zu stellen versucht, die dem Stoffe des Hochschulunterrichts entnommen sind. Die Namen der Einsender richtiger Lösungen werden in den nächsten Heften veröffentlicht. Bearbeitungen, die sich durch Originalität und Eleganz der Darstellung auszeichnen, werden, soweit der Platz verfügbar ist, zum Abdruck gelangen. Durch die Mannigfaltigkeit der Gaben soll vor allem die Langweiligkeit und die Kleinigkeitskrämerei aus dem Archiv verbannt werden.

Zeitschrift für mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht. Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an den höheren Schulen, Lehrerseminaren und gehobenen Bürgerschulen. Zugleich Organ der Sektionen für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht in den Versammlungen der Philologen, Naturforscher, Seminar- und Volksschullehrer, gibt auch Mitteilungen über den „Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und in den Naturwissenschaften". Begründet 1869 durch J. C. V. Hoffmann. Herausgegeben von Dr. H. Schotten, Direktor der Städt. Oberralschule zu Halle a. S., Mitglied der Kaiserl. Leopoldinisch-Karolin. Akademie der Naturforscher. 40. Jahrg. 1909. Jährlich 12 Hefte. gr. 8. Preis für den Jahrgang n. *M.* 12.—

Diese Zeitschrift hat seit ihrem Bestehen auf dem Gebiete des höheren Schulwesens erfolgreich gewirkt und ist nicht nur in Deutschland, sondern auch im Auslande weit verbreitet. Sie hat trotz mancher nach ihrem Muster neugegründeter ähnlicher Organe ihre Bedeutung fortdauernd sich erhalten. Ihr Wert beruht hauptsächlich in der Mannigfaltigkeit ihres Inhalts: I. Originalartikel. Aufgabenrepertorium. II. Literarische Berichte: Rezensionen, Programm- und Journalschau, Bibliographie. III. Pädagogische Zeitung; Berichte über höheres Schulwesen überhaupt und insbesondere über Versammlungsverhandlungen, die mit demselben Beziehung oder Berührung haben. Ein besonderer Vorzug der Zeitschrift ist das von den Lesern sehr geschätzte und viel benutzte Aufgabenrepertorium, von welchem bereits eine separate Sammlung aus den ersten 25 Bänden der Zeitschrift vorliegt. Die Rezensionen werden teils von gereiften Schulmännern, teils von Universitätsprofessoren geliefert. Die Zeitschrift wurde sofort nach ihrer Gründung von allen Schulbehörden den ihnen unterstehenden Schulen empfohlen.

Ahrens, Dr. W., in Magdeburg, mathematische Unterhaltungen und Spiele. Mit 1 Tafel und vielen Figuren im Text. [X u. 428 S.] gr. 8. 1901. In 2 Hälften geh. je n. *M.* 5.— In Original-Leinwandband mit Zeichnung von P. Bürck in Darmstadt. n. *M.* 10.—

——— Kleine Ausgabe: Mathematische Spiele. 170. Band der Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen „Aus Natur und Geisteswelt". Mit einem Titelbild und 69 Figuren im Text. [VI u. 118 S.] 8. 1907. Geh. n. *M.* 1.—, in Leinwand geb. n. *M.* 1.25.

„Der Verfasser derselben wollte sowohl den Fachmann, den der theoretische Kern des Spieles interessiert, als den mathematisch gebildeten Laien befriedigen, dem es sich um ein anregendes Gedankenspiel handelt; und er hat den richtigen Weg gefunden, beides zu erreichen. Dem wissenschaftlichen Interesse wird er gerecht, indem er durch die sorgfältig zusammengetragene Literatur und durch Einschaltungen mathematischen Inhalts die Beziehungen zur

Wissenschaft herstellt; dem Nichtmathematiker kommt er durch die trefflichen Erläuterungen entgegen, die er der Lösung der verschiedenen Spiele zuteil werden läßt, und die er, wo nur irgend nötig, durch Schemata, Figuren und dergleichen unterstützt."
(Professor Czuber in der **Zeitschrift für das Realschulwesen.**)

Borel, Dr. E., Professor an der Sorbonne zu Paris, Elemente der Mathematik. In 2 Bänden. Deutsche Ausgabe, besorgt von P. Stäckel, Professor in Karlsruhe i. B.

I. Band: Arithmetik und Algebra. Mit 57 Figuren und 3 Tafeln. [XVI u. 431 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. n. ℳ 8.60.
II. — Geometrie. [Unter der Presse.]

Die Vorschläge zu einer Reform des Unterrichtes in den Elementen der Mathematik die neuerdings seitens der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte gemacht worden sind, hatten in Frankreich bereits seit 1900 in den offiziellen Lehrplänen Verwirklichung gefunden. Auf dieser modernen Grundlage hat E. Borel seine vortrefflichen Lehrbücher aufgebaut, die in Frankreich weite Verbreitung gefunden haben. Es erschien daher angebracht, diese Elemente der Mathematik in einer den deutschen Verhältnissen angepaßten Bearbeitung dem deutschen Publikum zugänglich zu machen.

Enriques, Dr. F., Professor an der Universität Bologna, Fragen der Elementargeometrie. Aufsätze von U. Amaldi, E. Baroni, R. Bonola, B. Calò, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vailati, G. Vitali, gesammelt und zusammengestellt von F. Enriques. Deutsche Ausgabe von Dr. H. Fleischer in Königsberg i. Pr. In 2 Teilen.

I. Teil: Prinzipien der Geometrie. Deutsch von Professor Dr. H. Thieme in Posen. [In Vorbereitung.]
II. — Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. Mit 135 Textfiguren. [XII u. 348 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. ℳ 9.—

Der vorliegende Band bildet den zweiten Teil der deutschen Ausgabe der im Jahre 1900 unter Mitwirkung zahlreicher Mitarbeiter erschienenen „Questioni riguardanti la geometria elementare", die in größerem Umfange demselben Zwecke dienen sollen wie F. Kleins 1895 erschienene nunmehr vergriffene „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie": eine Sammlung derjenigen Fragen zu sein, bei welchen die Ergebnisse der höheren mathematischen Theorien oder eine feinere logische Kritik es möglich gemacht haben, dem Inbegriff klassischer Lehren, als deren Zusammenfassung das Werk Euklids gewöhnlich betrachtet wird, etwas Grundlegendes hinzuzufügen. Es enthält die Artikel VII—XIV des Originals und außerdem einen neuen Artikel (den neunten), die sämtlich von den „Konstruktionsaufgaben" handeln, während die ersten sechs Artikel — die den ersten Teil der deutschen Ausgabe bilden werden — die „Prinzipien der Geometrie" behandeln. Der zweite Teil erscheint zuerst, weil er u. a. bestimmt ist, die obengenannte Schrift von F. Klein, die nicht neu aufgelegt werden soll, zu ersetzen.

Grundlehren der Mathematik. Für Studierende und Lehrer. In 2 Teilen. Mit vielen Textfiguren. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Teil: Die Grundlehren der Arithmetik und Algebra. Bearbeitet von C. Färber und E. Netto. 2 Bände. (In Vorbereitung.)
II. Teil: Die Grundlehren der Geometrie. Bearbeitet von H. Thieme und W. Frz. Meyer. 2 Bände.
1. Band: Die Elemente der Geometrie. Von Dr. Hermann Thieme, Professor an der Kgl. Berger-Oberrealschule in Posen. Mit zahlreichen Textfiguren. [XII u. 394 S.] (Erscheint März 1909.)
2. — (In Vorbereitung.)

Die „Grundlagen der Mathematik" sind als ein, dem heutigen Stande der Wissenschaft entsprechendes Gegenstück zu R. Baltzers „Elementen der Mathematik" gedacht. Sie bilden kein Handbuch, in dem aller irgendwie wissenswerte Stoff aufgespeichert wurde, sondern sie sind in erster Linie dem Unterricht, und zwar auch dem Selbstunterricht gewidmet. Tieferen Fragen suchen sie durch gelegentliche Ausblicke gerecht zu werden. Nicht minder soll auch den historischen Interessen Rechnung getragen werden durch die Angabe der wichtigsten Momente in der zeitlichen Entwicklung der einzelnen Theorien.

Speziell wird der erste Teil in freier Darstellung den Grundlagen, Grundzügen und Grundmethoden der Geometrie gewidmet sein. Im ersten Bande (Verfasser H. Thieme) werden die „Elemente", einschließlich der analytischen Geometrie der Ebene, gerade durch das sorgfältige Eingehen auf das Axiomatische, ihre charakteristische Färbung erhalten, ohne daß die praktischen Forderungen des Lehrstoffes vernachlässigt würden. Der zweite Band (Verfasser W. Fr. Meyer) wird unter Heranziehung der Hilfsmittel der modernen Algebra (und auch Funktionentheorie) die Geometrie der „Transformationen" behandeln, wobei mit Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum eine beschränkte Auswahl von selbst geboten ist.

Gutzmer, Dr. A., Professor an der Universität Halle a. S., Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher

Naturforscher und Ärzte. Gesamtbericht, enthaltend die Vorverhandlungen auf den Versammlungen in Cassel und Breslau sowie die seitens der Kommission den Versammlungen in Meran, Stuttgart und Dresden unterbreiteten Reformvorschläge. Im Auftrage der Kommission herausgegeben. [XII u. 322 S.] Lex.-8. 1908. In Leinw. geb. n. *M.* 7.—

Die Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte hat nach dreijähriger Tätigkeit ihre Aufgabe im wesentlichen als erledigt erachtet und will in dem vorliegenden „Gesamtbericht" ein möglichst vollständiges Bild ihrer Bestrebungen und Reformvorschläge allen interessierten Kreisen, den Behörden, den Schul- und Fachmännern und dem gebildeten Publikum darbieten, die ihren Arbeiten ein so erfreuliches Interesse gewidmet haben. Die Kommission glaubte, sich in diesem Gesamtberichte nicht auf die Zusammenstellung der verschiedenen von ihr ausgearbeiteten Reformvorschläge beschränken zu sollen; sie hat daher, um die ganze Reformbewegung im Gebiete des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts klarer hervortreten zu lassen, auch die Vorverhandlungen auf der Casseler und der Breslauer Naturforscherversammlung mit aufgenommen. Sind die dort gehaltenen Vorträge und gefaßten Beschlüsse auch nicht formell von der Kommission ausgegangen, so vervollständigen sie doch nach mancher Richtung das Bild von der Entwicklung der Kommissionsvorschläge.

Den Abschluß des Bandes bilden die auf der Dresdener Versammlung gepflogenen Verhandlungen, die zum Ziele hatten, an Stelle der von der Naturforschergesellschaft eingesetzten Kommission einen allgemeinen Unterrichtsausschuß zu berufen, in den die großen mathematischen, naturwissenschaftlichen, medizinischen und pädagogischen Vereine und Gesellschaften Vertreter entsenden, um die Weiterführung der Kommissionsarbeit in die Wege zu leiten.

Höfler, Dr. **A.**, Professor an der Universität Wien, Didaktik des mathematischen Unterrichts. A. u. d. T.: Didaktische Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen. Herausgegeben von A. Höfler und F. Poske. Band I. [ca 500 S.] gr. 8. In Leinwand geb. [Erscheint Ostern 1909.]

Dieser erste Band der Sammlung didakter Handbücher für den realistischen Unterricht will Impulse geben, um die von Klein verlangte „zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichtes" in die Wirklichkeit umzusetzen. Vorbildlich sind die von Gutzmer auf der Meraner Naturforscherversammlung 1905 erstatteten Vorschläge. Im zweiten, ausführlichsten Teile werden Lehrproben, Lehrgänge, Lehrpläne als konkrete Beispiele seiner neuen Unterrichtspraxis vorgeführt. Im ersten Teile werden die Wege und Ziele eines solchen mathematischen Unterrichtes skizziert; im dritten folgen Blicke in die Grenzgebiete der didaktischen Psychologie, Erkenntnis- und Bildungslehre.

Killing, Geheimer Regierungsrat Dr. **W.**, Professor an der Universität Münster i. W., und Dr. **H. Hovestadt**, Professor am Realgymnasium zu Münster i. W., Handbuch des mathematischen Unterrichts. gr. 8. In Leinw. geb. [Band I erscheint Ostern 1909, Band II in Vorbereitung.]

Das Werk, dessen erster Band im Manuskript vorliegt, will einem doppelten Zweck dienen: der Vermittlung zwischen Wissenschaft und Unterricht sowie der Auswahl passender methodischer Lehrgänge. Die Verfasser sind der Ansicht, daß der Unterricht leide, wenn seine Beziehungen zur Wissenschaft sich lockern. Dagegen liefert eine genaue Kenntnis der Grundlagen der elementaren Mathematik wesentliche Gesichtspunkte für den Unterricht. Außerdem will das Buch zum Nachdenken über den Unterricht anregen. Es wägt die Vorteile und Mängel verschiedener Methoden gegeneinander ab, damit der Lehrer mit klarer Erkenntnis auswähle, was seiner Persönlichkeit und dem Standpunkt der Schüler am besten entspricht.

Klein, Geheimer Regierungsrat Dr. **F.**, Professor an der Universität Göttingen, Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Bearbeitet von Dr. Rud. Schimmack, Oberlehrer am Gymnasium zu Göttingen. A. u. d. T.: Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen I. Teil I: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Mit 8 zum Teil farbigen Textfiguren. [IX u. 236 S.] gr. 8. 1907. In Leinw. geb. n. *M.* 5.—

„Kleins Ausführungen sind in jeder Beziehung äußerst beachtenswert, das vorliegende Buch sollte daher von jedem Mathematiklehrer eifrigst studiert werden. Eine Fülle sehr wertvoller Anregungen werden solchem Studium entsprießen. Klein ist ein Vorkämpfer für viele, sehr erstrebenswerte neue Ziele. Den Funktionsbegriff will er in den Mittelpunkt des gesamten mathematischen Unterrichts gerückt sehen, die Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung empfiehlt er zur Einführung in höhere Schulen, ohne jedoch eine höhere Stundenzahl als bisher zu beanspruchen.... Als Verfechter der Gleichberechtigung der drei Gattungen höherer Schulen tritt Verf. auch energisch für eine Verminderung der Anzahl der Gymnasien ein. Auch dem Hochschulunterricht wendet Verf. seine Aufmerksamkeit zu." **(Naturw. Wochenschrift.)**

Klein, Geheimer Regierungsrat Dr. F., Professor an der Universität Göttingen, neue autographierte Vorlesungshefte. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Ausgearbeitet von E. Hellinger.

Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung gehalten im Wintersemester 1907—08. [VIII u. 590 S.] gr. 8. Geh. n. *M* 7.50.

Teil II: Geometrie. gr. 8. Geh. n. *M* 7.50. (Erscheint Ostern 1909.)

Die genannten Hefte schließen sich als Fortsetzungen an jene Vorträge „Über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen", speziell „Über die Organisation des mathematischen Unterrichts" an, die im vorigen Jahre im Teubnerschen Verlage erschienen sind. Indem der in Betracht kommende Stoff vom Standpunkte der Hochschule aus unter zusammenfassenden Gesichtspunkten dargelegt ist, wünscht Verfasser die Lehrer an unseren höheren Schultn zu veranlassen, über die Auswahl und die zweckmäßige Darbietung der von ihnen zu betrachtenden Gegenstände in neuer Weise selbständig nachzudenken.

——— u. Geheimrat Dr. **Ed. Riecke,** Professor an der Universität Göttingen, über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. Nebst Erläuterung der bezüglichen Göttinger Universitätseinrichtungen. Vorträge, gehalten in Göttingen Ostern 1900 bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik. Gesammelt von F. Klein und Ed. Riecke. Mit einem Wiederabdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von F. Klein. Mit 84 Figuren. [VI u. 252 S.] gr. 8. 1900. In Leinw. geb. n. *M* 6.—

Inhalt: **Ed. Riecke,** zur Geschichte des physikalischen Instituts und des physikalischen Unterrichts an der Universität Göttingen. **F. Klein,** Allgemeines über angewandte Mathematik. Über technische Mechanik. **F. Schilling,** über darstellende Geometrie. **E. Wiechert,** Einführung in die Geodäsie. **G. Bohlmann,** über Versicherungsmathematik. **Eug. Meyer,** die Wärmeausnutzung der Dampfmaschinen. **Th. Descoudres,** über Elektrotechnik.

Ferner an früheren Aufsätzen von **F. Klein:** Plan eines physikalisch-technischen Universitätsinstituts, 1895; Anforderungen der Ingenieure und Ausbildung der Lehramtskandidaten, 1896; Universität und technische Hochschule, 1898; Neueinrichtungen in Göttingen, 1899.

——— neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904. Gesammelt von F. Klein und Ed. Riecke. Mit einem Abdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von E. Götting und F. Klein. Enthaltend Beiträge der Herren, O. Behrendsen, E. Bose, E. Götting, F. Klein, Ed. Riecke, Fr. Schilling, J. Stark, K. Schwarzschild.

I. Teil (1. u. 2. Heft). Mit 6 Figuren im Text. [VII u. 190 S.] gr. 8. 1904. Geh. n. *M* 3.60.

Inhalt: **F. Klein,** Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen; Bemerkungen im Anschluß an die Schulkonferenz von 1900. — **E. Götting,** Über das Lehrziel im mathematischen Unterricht der höheren Lehranstalten. — **F. Klein,** Hundert Jahre mathematischer Unterricht an den höheren preußischen Schulen. — **F. Klein,** Bemerkungen zu den sog. Hamburger Thesen der Biologen. — **Ed. Riecke,** Grundlagen der Elektrizitätslehre mit Beziehung auf die neueste Entwicklung. — **O. Behrendsen,** Über einige den Unterricht in der Physik und Chemie an höheren Schulen betreffende Fragen. — **J. Stark,** Über die Physik an der Schule. — **E. Bose,** Über Kurse in physikalischer Handfertigkeit. — **K. Schwarzschild,** Astronomische Beobachtungen mit elementaren Hilfsmitteln.

Sonderausgaben: **Klein,** Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts. [IV u. 82 S.] Geh. n. *M* 1.60.

Riecke, Beiträge zur Frage des Unterrichts in Physik und Astronomie. [III u. 83—190 S.] Geh. n. *M* 2.—

II. Teil (3. Heft). Mit 151 Figuren und 5 Doppeltafeln. [VI u. 198 S.] gr. 8. 1904. Geh. n. ℳ 5.—

Inhalt: Friedrich Schilling, Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie. Mit einem Anhang: Welche Vorteile gewährt die Benutzung des Projektionsapparates im mathematischen Unterricht.

Teil I und II in einem Band gebunden n. ℳ 8.60.

Lipps, Dr. G. F., Professor an der Universität Leipzig, der moderne wissenschaftliche Schulunterricht. [In Vorbereitung.]

Müller, Dr. F., Professor in Friedenau-Berlin, Führer durch die mathematische Literatur. Mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtigen Schriften. [X u. 252 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. ℳ 7.—, in Leinwand geb. n. ℳ 8.—

Das Buch gibt eine systematische Übersicht über diejenigen Einzelwerke und Journalabhandlungen aus der reinen Mathematik, deren Kenntnis dem Studierenden unentbehrlich ist. Besondere Berücksichtigung haben die historisch wichtigen Schriften gefunden sowie auch die Zeitschriften-Literatur und die Enzyklopädien. Der Studierende, welcher Vorlesungen über eine spezielle Disziplin besucht, wird in den Stand gesetzt, die Quellen dieser Disziplinen, die Originalarbeiten, die Lehrbücher, die Aufgabensammlungen, die Tafeln usw., auf welche in der Vorlesung oft nur in Kürze hingewiesen werden kann, mit Leichtigkeit aufzufinden. Auch weist der Führer auf Studienwerke für diejenigen Disziplinen hin, über welche nicht gelesen wurde.

E. Pascals Repertorium der höheren Mathematik. In 2 Teilen: Analysis und Geometrie. 2. neubearbeitete Auflage. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Teil: Die Analysis. Unter Mitwirkung von E. Pascal sowie Ph. Furtwängler, A. Guldberg, H. Hahn, E. Jahnke, H. Jung, A. Loewy, H. E. Timerding, hrsg. von Dr. P. Epstein, Professor an der Universität Straßburg i. E. [ca. 800 S.] ca. n. ℳ 12.—, [Erscheint Ostern 1909.]

II. — Die Geometrie. Unter Mitwirkung von E. Pascal sowie L. Berzolari, R. Bonola, E. Ciani, M. Dehn, Fr. Dingeldey, F. Enriques, G. Giraud, H. Grassmann, G. Guareschi, L. Heffter, W. Jacobsthal, H. Liebmann, J. Mollerup, J. Neuberg, U. Perazzo, O. Staude, E. Steinitz, H. Wieleitner und K. Zindler, herausgeg. von Dr. H. E. Timerding, Professor an der Universität Straßburg i. E. [ca. 800 S.] ca. n. ℳ 14.—. [Erscheint Herbst 1909.]

Bei der Bearbeitung der zweiten Auflage werden die Herausgeber in erster Linie bestrebt sein, dem Buche seine Vorzüge zu erhalten Daneben aber erfährt es formell und inhaltlich so durchgreifende Änderungen, daß es in vieler Beziehung als ein neues Werk gelten kann.

Zunächst muß im ersten Teile den in den letzten Jahren erzielten Fortschritten Rechnung getragen werden, neue Methoden, (z. B. in der Variationsrechnung) und neu eröffnete Gebiete, wie die Integralgleichungen, die moderne Funktionentheorie, die algebraischen Zahlen fordern eine nicht unbeträchtliche Erweiterung des Stoffes, ganz besonders aber haben es die Bearbeiter nach Möglichkeit vermieden, eine große Menge von Einzelheiten lose aneinander zu reihen, sondern haben vielmehr auf eine zusammenhängende und in sich geschlossene Darstellung Wert gelegt.

Dieselben Grundsätze werden dann auch im 2. Teile befolgt werden. Es soll nicht bloß eine Übersicht über das weite Gebiet der Geometrie im einzelnen, sondern auch eine Darlegung ihrer allgemeinen Prinzipien und Methoden gegeben und von dem gegenwärtigen Stand der Auffassungen Rechenschaft erteilt werden.

Schmid, Dr. B., Oberlehrer am Realgymnasium zu Zwickau, der naturwissenschaftliche Unterricht und die wissenschaftliche Ausbildung der Lehramtskandidaten der Naturwissenschaften. Ein Buch für Lehrer der Naturwissenschaften aller Schulgattungen. [IV u. 352 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. ℳ 6.—

Das Buch geht nach einer Schilderung der gegenwärtigen Reformbestrebungen auf dem Gebiete des naturwissenschaftlichen Unterrichts auf den Bildungswert der Naturwissenschaften näher ein und betrachtet denselben nach seiner sachlichen und formalen Seite. Es folgen eingehendere Abhandlungen über den Biologieunterricht im allgemeinen, den Unterricht in Anthropologie, Zoologie, Botanik, Mineralogie, Geologie (Geographie), Chemie und Physik (Astronomie), in denen die methodischen Bestrebungen des naturwissenschaftlichen Unterrichts der Gegenwart behandelt werden, und woselbst neben den höheren Schulen auch die Volksschulen zu Worte kommen. Besondere Abschnitte sind auch dem Zeichnen, dem Schulgarten, der Exkursion, den Schülerübungen, den Sammlungen und der philosophischen Propädeutik gewidmet. Endlich wird auf die Ausbildung der Lehrer für Naturwissenschaften näher eingegangen und zum Schluß eine Übersicht über die Lehrpläne verschiedener Schulgattungen gegeben.

„Große Verbreitung ist diesem Buche zu wünschen.... Es soll die Lehrer der Naturwissenschaften anregen, aus ihrem Unterricht das zu machen, was ihr Fach wirklich leisten kann.... Da er selbst Schulmann ist, sind viele wertvolle methodische Bemerkungen vorhanden. Beherzigenswert erscheinen auch die Hinweise auf Verknüpfung der einzelnen Zweige und die Warnung vor Übertreibung nach dieser Richtung.... Wer das reichliche Material in dem Abschnitt „Bildungswert der Naturwissenschaften" liest, muß zu einer gerechteren Würdigung gelangen, und wenn er bei den einzelnen Fächern das überblickt, was etwa Schmid als das Ergebnis des Unterrichts haben will, so wird er zugeben müssen, daß diese Bildung den Namen „allgemeine Bildung" mindestens ebensogut verdient wie die jetzt vom Gymnasium übermittelte." (Physikalische Zeitschrift.)

Schriften, mathematische und physikalische für Ingenieure und Studierende. Herausgegeben von Dr. E. Jahnke, Professor an der Kgl. Bergakademie zu Berlin. In Bänden zu 5—6 Bogen. 8. Steif geh. u. in Leinwand geb.

Bisher erschien Band:

I. Einführung in die Theorie des Magnetismus. Von Dr. R. Gans, Privatdozent an der Universität Tübingen. Mit 40 Textfiguren. [VI u. 110 S.] 1908. Steif geh. n. ℳ 2.40, in Leinwand geb. n. ℳ 2.80.

II. Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. Von K. W. Wagner, Ingenieur in Charlottenburg. Mit 23 Textfiguren. [IV u. 109 S.] 1908. Steif geh. n. ℳ 2.40, in Leinwand geb. n. ℳ 2.80.

III. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Von Dr. Cl. Schaefer, Privatdozent an der Universität Breslau. Mit Bildnis J. C. Maxwells und 32 Textfiguren. [VIII u. 174 S.] 1908. Steif geh. n. ℳ 3.40, in Leinwand geb. n. ℳ 3.80.

IV. Die Theorie der Besselschen Funktionen. Von Dr. P. Schafheitlin, Professor am Sophien-Realgymnasium zu Berlin. Mit 1 Figurentafel. [V u. 129 S.] 1908. Steif geh. n. ℳ 2.80, in Leinwand geb. n. ℳ 3.20.

Weitere Bände in Vorbereitung.

Simon, Dr. M., Professor am Lyceum und Honorarprofessor an der Universität Straßburg i. E., Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. Mit Benutzung der Textausgabe von J. L. Heiberg. Mit 192 Figuren im Text. [VII u. 141 S.] gr. 8. 1901. Geh. n. ℳ 5.—

Vorliegendes Buch gibt nach der Textausgabe von Heiberg eine mit erläuternden Anmerkungen versehene Übersetzung der sechs ersten Bücher von Euklids Elementen. Voran geht eine Einleitung, die über Leben und Schriften des Euklid, Anlage, Textausgaben, Kommentatoren usw der Elemente berichtet.

——— Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Mit 9 Textfiguren. [VI u. 108 S.] gr. 8. 1906. Geb. n. ℳ 3.20.

Die vorliegende Schrift bezweckt, den Studierenden die Ziele des arithmetisch-algebraischen Unterrichts der neunklassigen höheren Schulen zu zeigen und sie anzuleiten, den zusammenfassenden Überblick auf der obersten Stufe methodisch zu geben. — Die Schrift zerfällt in zwei nebeneinander herlaufende Teile: die Entwicklung des Zahlbegriffs vom Zählen an bis zu den komplexen Zahlen und die Auflösung der algebraisch auflösbaren Gleichungen. Der Begründung des Begriffs und der Rechnungsregeln der Irrationalzahlen ist besondere Sorgfalt gewidmet, der Verfasser hat sich dabei wesentlich an die Georg Cantorsche Methode gehalten, weil sie s. E. wesentliche Vorzüge vor der Dedekindschen und Weierstraßschen besitzt. Eine geringfügige Modifikation ist durch die Auffassung des Verfassers vom Grenzbegriff als einer Kategorie, d. h. eines irreduzibeln Grundvermögens der Vernunft bedingt. Die ganze Entwicklung wird beherrscht von der Ausbildung des Funktionsbegriffs, dessen zentrale Stellung im Unterricht der Verfasser schon seit mehr als 20 Jahren betont hat.

——— über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Ergänzungsband I. Mit 28 Figuren im Text. [VIII u. 278 S.] gr. 8. 1906. Geh. n. ℳ 8.—, in Leinwand geb. n. ℳ 9.—

Das Vorstehende ist ein Bericht über die historische Entwicklung der Elementar-Geometrie im 19. Jahrh., wobei der Verf. unter Elementar-Geometrie das verstanden hat, was an Geometrie, von Kegelschnitten und projektiver Geometrie abgesehen, auf den höheren Lehranstalten gelehrt werden kann. (Eine Ausnahme macht die Verdoppelung des Würfels.) Die

Arbeit umfaßt dementsprechend 34 Artikel, in denen jeweils für die einzelnen Kapitel resp. Gegenstände der Elementar-Geometrie ein zusammenfassender Überblick vorangestellt ist, woran sich ein ausführliches Literaturverzeichnis mit sich anschließenden kritischen Bemerkungen reiht. Ein kurzer Nachtrag zur Methodik und ein Namenregister beschließen das Buch.

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker, unter Mitwirkung von Fr. Auerbach, O. Knopf, H. Liebmann, E. Wölffing u. a. herausg. von Felix Auerbach. 8. Geb. [Erscheint im Februar 1909.]

Während es Taschenbücher und Kalender für Chemiker, Geographen, Techniker, Elektrotechniker, Astronomen usw. gibt, entbehren die Mathematiker und Physiker bis heute dieses bequemen und, wenn einmal vorhanden, unentbehrlichen Hilfsmittels. Es wird hiermit dem Kreise der Interessenten zum ersten Male vorgelegt, und zwar mit Rücksicht auf die nahen Beziehungen zwischen Mathematik und Physik in einer beide Wissenschaften umfassenden Form. Es enthält Angaben über Personalien, Literatur, Praktisches usw., hauptsächlich aber ein Gerippe des Tatsachenmaterials der genannten Disziplinen, zu denen noch Astronomie, Geodäsie und physikalische Chemie als Annexe hinzugefügt wurden, um allseitigen Bedürfnissen entgegenzukommen. Bei dem gewaltigen Umfange der in Rede stehenden Wissenschaften mußte man sich für diesen ersten Jahrgang auf eine Auswahl des zunächst Wichtigsten und Dringendsten beschränken; es ist aber in Aussicht genommen, in den folgenden Jahrgängen immer wieder neues hinzuzufügen, so daß die Abnehmer nach und nach ein, dem Charakter eines Taschenbuches entsprechend, lückenloses Material in die Hand bekommen.

Von den Mitarbeitern wird E. Wölffing die reine Mathematik, H. Liebmann die Mechanik, O. Knopf die Astronomie und Geodäsie, Fr. Auerbach die physikalische Chemie und der Herausgeber den Rest bearbeiten.

Voß, Dr. **A.**, Professor an der Universität München, über das Wesen der Mathematik. Rede, gehalten am 11. März 1908 in der öffentlichen Sitzung der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Erweitert und mit Anmerkungen versehen. [98 S.] gr. 8. 1908. Steif geh. n. *M* 3.60.

In dieser kleinen Schrift ist der Versuch gemacht, an der Hand der historischen Entwicklung der Mathematik ihr Wesen in einer auch dem nicht speziell mathematisch Gebildeten zugänglichen Form zu schildern. Der Verfasser sieht das Charakteristische der reinen Mathematik in der Anwendung des Zahlbegriffes, falls dieser so allgemein gefaßt wird, daß Zahlen Zeichen für ordnende Tätigkeiten unseres Verstandes sind, während die Anwendungsgebiete (Geometrie, Mechanik) sich mit der Arithmetisierung, d. h. der Unterwerfung der Anschauung unter den Zahlbegriff beschäftigen, und sucht von diesem Gesichtspunkt aus die Entwicklung der Mathematik zu beleuchten. Einen wesentlichen Teil der Schrift bilden die zahlreichen historisch-kritischen Anmerkungen; sie dürften namentlich denen willkommen sein, welche in die hier behandelten Fragen tiefer eindringen wollen.

Weber, Dr. H., u. Dr. J. **Wellstein**, Professoren an der Universität Straßburg i. E., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr 8.

I. Band. Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von Heinrich Weber. 2. Aufl. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. In Leinwand geb. n. *M* 9.60.

II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von Heinrich Weber, Joseph Wellstein und Walther Jacobsthal. 2. Aufl. Mit 251 Textfiguren. [XII u. 596 S.] 1907. In Leinwand geb. n. *M* 12.—

III. — Angewandte Elementar-Mathematik. Bearbeitet von Heinrich Weber, Joseph Wellstein und Rud. H. Weber (Rostock). Mit 358 Textfiguren. [XIII u. 666 S.] 1907. In Leinwand geb. n. *M* 14.—

Das vorliegende Werk wendet sich in erster Linie an die gegenwärtigen und künftigen Lehrer an höheren Schulen, an die Studierenden der Mathematik unserer Hochschulen. Es beansprucht nicht, wie die große Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, das Material allseitig zu erschöpfen, nach der historischen und literarischen Seite hin vollständigen Aufschluß zu geben. Es will eine Verbindung herstellen zwischen der höheren Mathematik und der Mathematik der Schule, indem es einerseits dem Studierenden ein Führer ist, wo er der Auffrischung und Ergänzung früher erworbener Kenntnisse bedarf, andererseits dem Lehrer ein Wegweiser, um das im Studium der höheren Mathematik Erworbene der Vertiefung und Bereicherung des Unterrichts nutzbar zu machen. Besonderes Gewicht ist auf die wissenschaftliche Ausgestaltung der allgemeinen Grundlagen gelegt.